

〔論文〕

任意に分布するき裂群の解析

(第2報: 面内せん断を受ける無限板)

井川 秀信*

Analysis of Arbitrary Arrays of Cracks
(Part 2 Infinite Plate Subjected by In-plane Shear)

Hidenobu IGAWA

Abstract

In this paper, we consider arbitrary arrays of cracks in an infinite plate. In the analysis, we use the Body Force Method (BFM) satisfying the traction-free conditions of crack edges, in which expressions of the body force densities based on resultant forces are introduced. Numerical calculations are performed for various arrays of cracks under in-plane shear.

要 旨

本研究では、無限板に任意に分布するき裂群を考えた。解析では、き裂の自由縁の条件を満足させるため体積力法を用い、合力に基づく体積力密度を分布させることで高精度の計算結果を得ることができた。数値計算では面内せん断下で種々に分布するき裂群について行った。

1. 緒 言

前報⁽¹⁾では、任意に分布するき裂群について体積力法による高精度応力解析法を開発し、引張応力下での平行傾斜き裂群の無次元応力拡大係数および微小き裂群の存在によるマクロき裂の無次元応力拡大係数の結果を与えた。等長の平行傾斜き裂群では、各き裂の応力拡大係数はき裂の傾斜角度に関係なくき裂個数の逆数 $1/N$ と良い直線関係にあることを見出した。この関係は、微小な等長き裂群の存在によるマクロき裂の応力拡大係数の場合にも適用できることを明らかにした。

本研究は、前報に続いて複数個のき裂が任意に分布する場合について汎用的な高精度応力解析法の開発を目指し、面内せん断下での適用を試みたものである。解析は、き裂相当面に体積力を分布させてき裂縁を自由とする方法を取り、合力に基づく境界分

割法を用いて体積力の重みを高精度に定めた。計算例では、平行き裂群の応力拡大係数とその漸近特性や微小き裂群の存在によるマクロき裂の応力拡大係数など、種々のき裂干渉問題について検討する。

2. 解析方法

二次元弾性問題における応力、合力の成分は、複素応力関数 $\varphi(z)$ 、 $\psi(z)$ とそれらの微係数によって次のように与えられる。

$$\sigma_y + \sigma_x = 4\text{Re}[\varphi(z)] \quad (1)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \quad (2)$$

$$P_y + iP_x = -\bar{\varphi}(\bar{z}) - z\varphi'(\bar{z}) - \psi'(z) \quad (3)$$

先ず、Fig. 1 に示した無限板に角度 β の傾斜をも

*交通機械工学科
平成22年10月6日受理

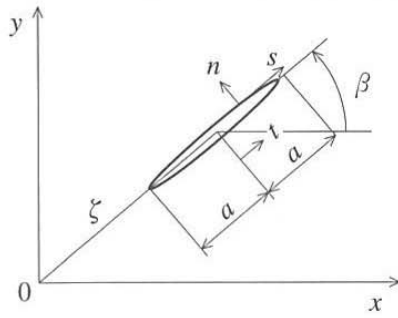
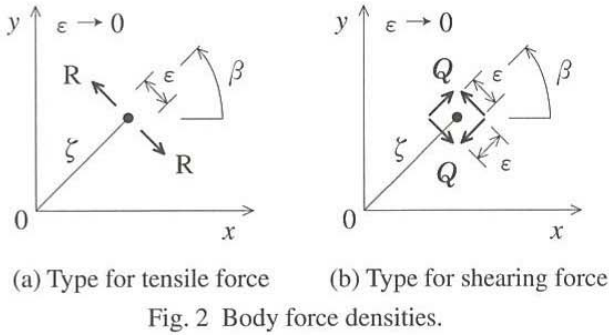


Fig. 1 Slant crack.



(a) Type for tensile force (b) Type for shearing force
Fig. 2 Body force densities.

つき裂を考える。原点Oに対するき裂中央の位置を ζ とし、き裂長さを $2a$ とする。またき裂面に沿った法線方向 n と接線方向 s を図のように定める。

本研究の解析には、Fig. 2(a)、(b)に示すような、無限板内の任意の点 ζ に作用する2種類の集中力対が基礎となる。これらに対する複素応力関数は次式(4)、(5)で与えられる。但し、ここで取扱うような境界条件が自平衡な荷重だけで与えられ、かつ応力状態だけを対象とする問題では、結果はポアソン比 ν に関係しないので、便宜上、 ν を0とした。

引張り型集中力対 R :

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= -\frac{R}{8\pi} \frac{e^{2i\beta}}{z-\zeta}, \\ \psi_1'(z) &= -\frac{R}{8\pi} \left[\frac{2}{z-\zeta} + \frac{\bar{\zeta} e^{2i\beta}}{(z-\zeta)^2} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

せん断型集中力対 Q :

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= \frac{iQ}{8\pi} \frac{e^{2i\beta}}{z-\zeta}, \\ \psi_2'(z) &= \frac{iQ}{8\pi} \frac{\bar{\zeta} e^{2i\beta}}{(z-\zeta)^2} \end{aligned} \quad (5)$$

従って、 P 、 Q が同時に作用する場合の関数は、

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_1(z) + \varphi_2(z), \\ \psi'(z) &= \psi_1'(z) + \psi_2'(z) \end{aligned} \quad (6)$$

となり、き裂面に沿った法線方向 n と接線方向 s の合力は次式から求められる。

$$\begin{aligned} P_n + iP_s &= (P_x + iP_y) e^{i\beta} \\ &= [-\bar{\varphi}(\bar{z}) - \bar{z}\varphi'(z) - \psi'(z)] e^{i\beta} \end{aligned} \quad (7)$$

このとき、 P_n 、 P_s は無限板に作用するせん断応力と次に述べるき裂縁を自由とする条件から求められ、それらが互いに打ち消し合うように体積力の重みを定める。

き裂面を自由縁とするために引張り型の体積力対 $R = p(t)dt$ とせん断型の体積力対 $Q = q(t)dt$ をき裂相当面に分布させる。ここに $p(t)$ 、 $q(t)$ はき裂面に分布させる体積力の密度であり、 t はき裂中央からの距離である。

任意個のき裂解析には各き裂縁に体積力対を分布させる必要がある。各き裂の座標系と幾何学パラメーターをFig. 3の様に定め、各き裂先端局部応力場の特性に適合する次の関係式を用いる。

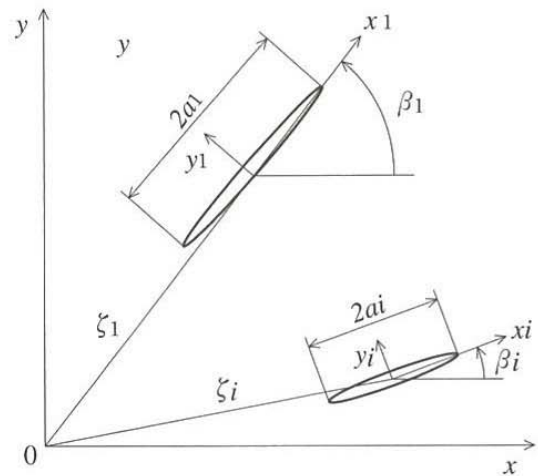


Fig. 3 Arbitrary array of cracks in wide plate.

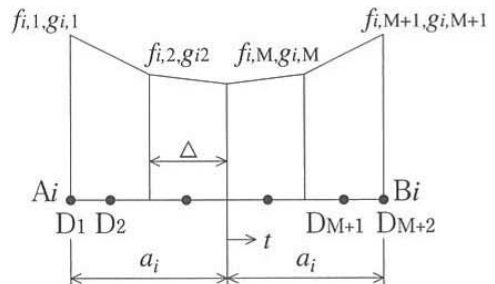


Fig. 4 Distribution of body force densities.

$$\begin{aligned} p(t) &= 4\sqrt{a_i^2 - t^2} f_i(t), \\ q(t) &= 4\sqrt{a_i^2 - t^2} g_i(t) \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)の重み関数 $f_i(t)$, $g_i(t)$ は、Fig.4 に示した折れ線関数による合力境界分割法で求めた。

き裂個数を N 、各き裂の半長を a_i とするとき、き裂端 A_i , B_i の応力拡大係数は次式で求められる。

$$\begin{aligned} K_{I,A_i}, K_{I,B_i} &= [f_i(t)]_{t=\pm a_i} \sqrt{\pi a_i}, \\ K_{II,A_i}, K_{II,B_i} &= [g_i(t)]_{t=\pm a_i} \sqrt{\pi a_i} \quad (i=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (9)$$

3. 解析結果

3. 1 無次元応力拡大係数

本研究では、次式で定義されたモード I、モード II の無次元応力拡大係数を求めた。なお、無限板に作用する平均せん断応力を τ とする。

無次元応力拡大係数

$$\begin{aligned} F_{I,A_i} &= \frac{K_{I,A_i}}{\tau\sqrt{\pi a_i}}, \quad F_{I,B_i} = \frac{K_{I,B_i}}{\tau\sqrt{\pi a_i}}, \\ F_{II,A_i} &= \frac{K_{II,A_i}}{\tau\sqrt{\pi a_i}}, \quad F_{II,B_i} = \frac{K_{II,B_i}}{\tau\sqrt{\pi a_i}} \quad (i=1, 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (10)$$

無限板に面内せん断を受ける一個の傾斜き裂をもつ場合の無次元応力拡大係数は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} F_I &= -2\cos\beta \sin\beta, \\ F_{II} &= \cos^2\beta - \sin^2\beta \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)から分かるように、き裂傾斜角度 β が $0^\circ \sim 90^\circ$ では F_I は負の値となり、き裂面が圧縮される。その結果、実際のき裂面は閉口し、上下のき裂面が接触する。き裂閉口時におけるき裂面接触による応力拡大係数に与える影響はわずかであるという報告⁽¹⁰⁾があるが、本研究ではき裂面接触の処理を行っていないためき裂傾斜角度 β を $0^\circ \sim -90^\circ$ の範囲で解析する。そして F_I が正の値 (開口時) の場合について解析結果を与える。

3. 2 等長平行き裂群

Fig.5 は、き裂個数 $N=2 \sim 10$ 、き裂の傾斜角度 $\beta = -30^\circ$ の等長平行き裂群が面内せん断を受ける場合について各き裂端の無次元応力拡大係数を示したものである。なお図中の左端がき裂群の最も外側であり、これよりき裂中央までの結果を示した。この場合 F_I は、き裂群の最も外側で最小となり、き裂群中央で最大となる。一方、 F_{II} はき裂群の最も外側で最大、き裂群の中央で最小となる。

F_I , F_{II} は、き裂の傾斜角度 β によってき裂群の

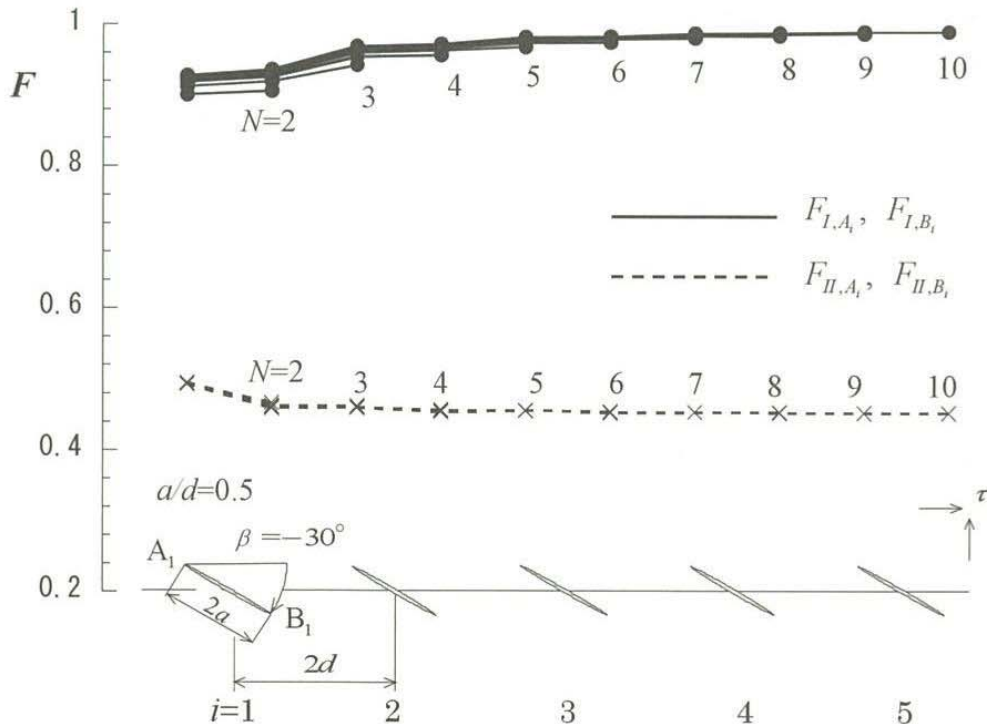


Fig. 5 F_I , F_{II} for each crack edges.

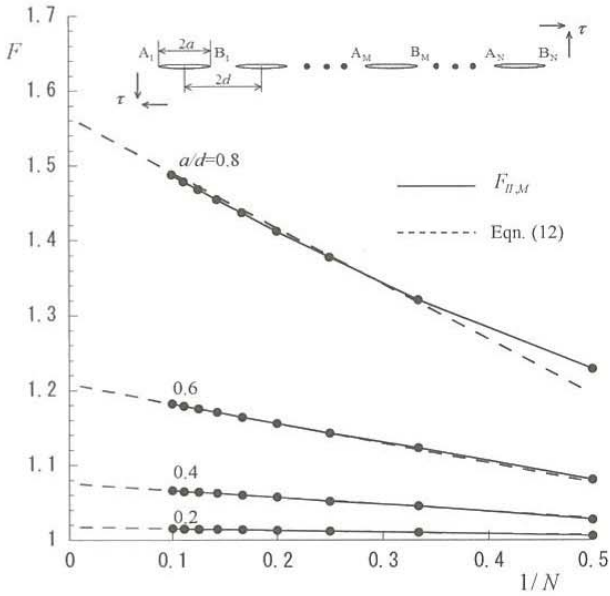


Fig. 6 $F, 1/N$ -relations for $\beta = 0$ [deg].

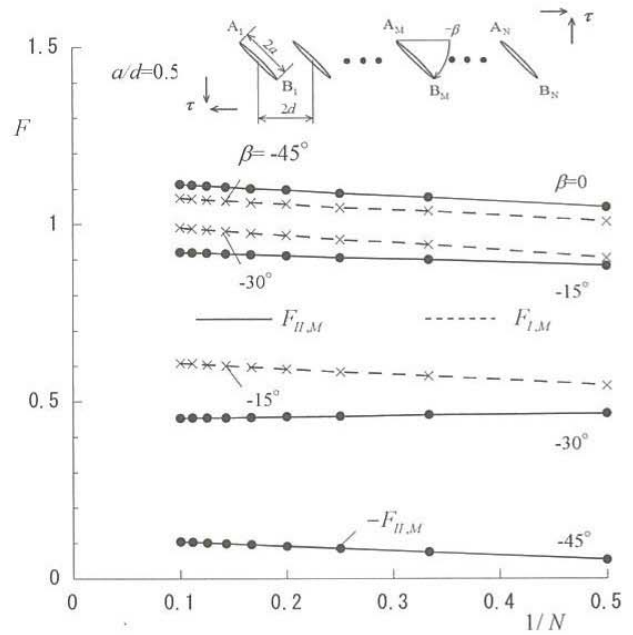


Fig. 8 $F, 1/N$ -relations.

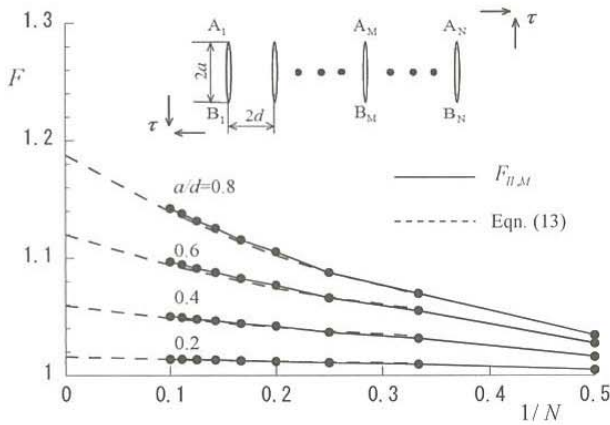


Fig. 7 $F, 1/N$ -relations for $\beta = -90$ [deg].

並びで最大、最小を与える位置が幾分異なる。本研究で行った範囲では、 F_I, F_{II} は、大体においてき裂群の最も外側で最小となり、き裂群中央で最大となる。なお、本論文ではき裂群中央の無次元応力拡大係数を $F_{I,M}, F_{II,M}$ で表す。

Fig. 6 は、図中に示したき裂の傾斜角度 $\beta = 0^\circ$ の一列等長き裂群の無次元応力拡大係数 $F_{II,M}$ とき裂個数の逆数 $1/N$ の関係を示したものである。 $F_{II,M}$ は、き裂個数の増加で $1/N$ と良い直線関係にある。

石田等は、この問題をローラン展開法で解析し、 $F_{II,M}$ の計算式として次の様に与えた⁽³⁾。

$$F_{II,M} = \left(\frac{2}{\pi\lambda} \tan \frac{\pi\lambda}{2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{N} (-0.469\lambda^2 - 0.615\lambda^3 + 2.081\lambda^4 - 2.986\lambda^5) \quad (12)$$

式(12)の値を図中に破線で示したが、解析値とよく一致していることが分かる。

Fig. 7 は、図中に示したき裂の傾斜角度 $\beta = -90^\circ$ の等長平行き裂群の無次元応力拡大係数 $F_{II,M}$ とき裂個数の逆数 $1/N$ の関係を示したものである。この場合も前述と同様に $F_{II,M}$ の値は、き裂個数の増加で $1/N$ と良い直線関係にある。

石田等は、この問題に対する $F_{II,M}$ の計算式を次の様に与えている⁽³⁾。

$$F_{II,M} = 1 + 0.4127\lambda^2 - 0.0098\lambda^3 - 0.2988\lambda^4 + 0.1551\lambda^5 + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N^2} \right) (-0.5740\lambda^2 - 0.3255\lambda^3 - 0.2361\lambda^4 + 0.2973\lambda^5) \quad (13)$$

式(12)の値を図中に破線で示したが、石田等も述べているように $N \geq 3$ で解析値とよく一致する。

Fig. 8 は、図中に示したき裂の傾斜角度 β の等長平行き裂群の無次元応力拡大係数 $F_{I,M}, F_{II,M}$ とき裂個数の逆数 $1/N$ の関係を示したものである。 $F_{II,M}$ の各線は、 $\beta = 0^\circ$ で最大となり、 β の減少で低下する。一方、 $F_{I,M}$ の各線は、 $\beta = -45^\circ$ で最大となり、

Table 1 Values of $F_{I,B\beta}$ for Fig. 8.

| $N\beta$ | $F_{I,M}$ | | | | | | |
|------------|-----------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | 0° | -15° | -30° | -45° | -60° | -75° | -90° |
| 2 | 0 | 0.545 | 0.906 | 1.008 | 0.849 | 0.477 | 0.018 |
| 3 | 0 | 0.572 | 0.943 | 1.038 | 0.869 | 0.492 | 0 |
| 4 | 0 | 0.584 | 0.957 | 1.047 | 0.871 | 0.490 | 0.003 |
| 5 | 0 | 0.592 | 0.969 | 1.057 | 0.878 | 0.494 | 0 |
| 6 | 0 | 0.597 | 0.975 | 1.061 | 0.879 | 0.494 | 0.001 |
| 7 | 0 | 0.602 | 0.981 | 1.066 | 0.883 | 0.496 | 0 |
| 8 | 0 | 0.604 | 0.985 | 1.069 | 0.884 | 0.496 | 0 |
| 9 | 0 | 0.607 | 0.988 | 1.072 | 0.885 | 0.497 | 0 |
| 10 | 0 | 0.609 | 0.990 | 1.074 | 0.886 | 0.497 | 0 |
| ∞^* | 0 | 0.629 | 1.010 | 1.086 | 0.894 | 0.501 | 0 |

* Values for $N \rightarrow \infty$ are extrapolated from those for $N=8, 10$.

Table 2 Values of $F_{II,B\beta}$ for Fig. 8.

| $N\beta$ | $F_{II,M}$ | | | | | | |
|------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | 0° | -15° | -30° | -45° | -60° | -75° | -90° |
| 2 | 1.048 | 0.883 | 0.467 | -0.053 | -0.545 | -0.896 | -1.022 |
| 3 | 1.077 | 0.900 | 0.462 | -0.075 | -0.572 | -0.919 | -1.044 |
| 4 | 1.088 | 0.906 | 0.458 | -0.086 | -0.583 | -0.929 | -1.052 |
| 5 | 1.097 | 0.912 | 0.457 | -0.092 | -0.591 | -0.936 | -1.060 |
| 6 | 1.101 | 0.915 | 0.455 | -0.096 | -0.596 | -0.941 | -1.063 |
| 7 | 1.106 | 0.917 | 0.455 | -0.099 | -0.600 | -0.945 | -1.067 |
| 8 | 1.108 | 0.919 | 0.454 | -0.102 | -0.603 | -0.947 | -1.069 |
| 9 | 1.111 | 0.920 | 0.454 | -0.103 | -0.605 | -0.950 | -1.072 |
| 10 | 1.112 | 0.921 | 0.453 | -0.105 | -0.607 | -0.951 | -1.073 |
| ∞^* | 1.128 | 0.929 | 0.449 | -0.117 | -0.623 | -0.967 | -1.089 |

* Values for $N \rightarrow \infty$ are extrapolated from those for $N=8, 10$.

β がこれより大きくても小さくても低下する。また、各 β に対する $F_{I,M}$ 、 $F_{II,M}$ は、き裂個数 N の増加で $1/N$ と良い直線関係にある。

無次元応力拡大係数とき裂個数の逆数 $1/N$ の関係を利用して $N \rightarrow \infty$ の $F_{I,M}$ 、 $F_{II,M}$ の値を求めることができる。Table 1, 2 は、Fig. 8 の結果を含むき裂の傾斜角度 β の $0^\circ \sim -90^\circ$ に対する $F_{I,M}$ 、 $F_{II,M}$ の値と $N=8, 10$ から外挿した $N \rightarrow \infty$ の無次元応力拡大係数を示したものである。

3. 3 主き裂と副き裂群の干渉

本節では、微小なき裂群の存在によるマクロき裂の応力拡大係数に与える影響について調べるため、主き裂と副き裂群の干渉について解析例を示す。なお以下の結果では主き裂の長さを a_1 、副き裂の長さを a_2 とする。

まず、副き裂が主き裂の両端 A_1 、 B_1 の応力拡大係数に与える影響について検討する。

Fig. 9 は、面内せん断を受ける場合について副き裂の角度 $\beta=0^\circ$ 、 $(a_1+2a_2)/d=1$ としたときの副き裂に対する主き裂の長さ比 a_1/a_2 と主き裂の無次

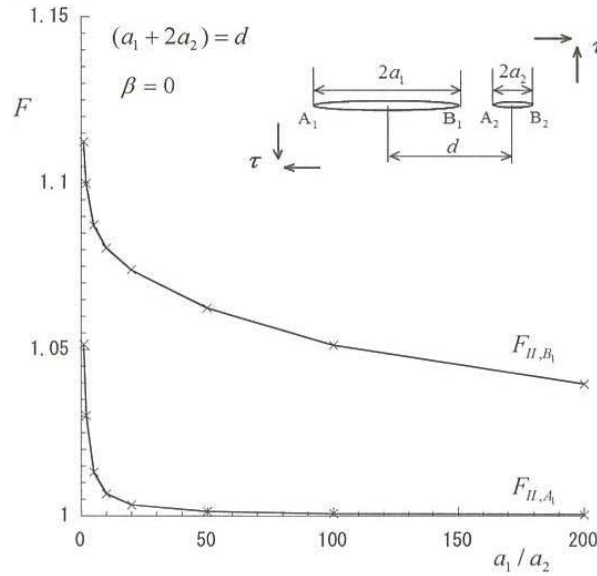


Fig. 9 $F, a_1/a_2$ -relations.

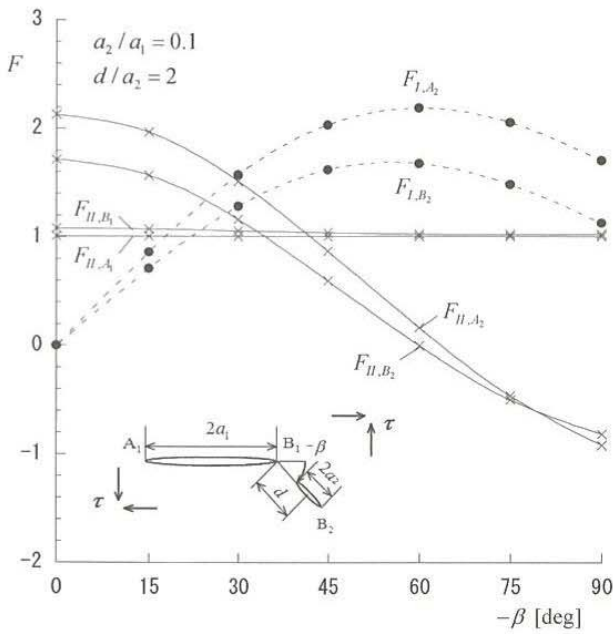


Fig. 10 $F, -\beta$ -relations.

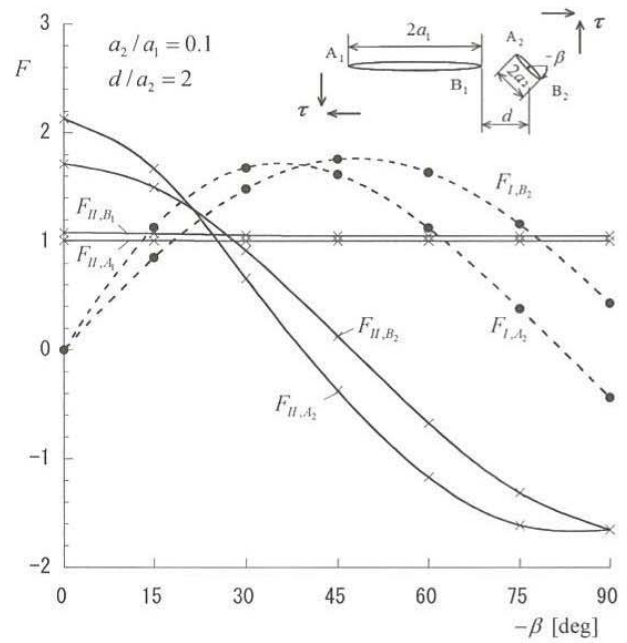


Fig. 11 $F, -\beta$ -relations.

元応力拡大係数 F_{II, A_1} 、 F_{II, B_1} の関係を示したものである。図に示す様に $a_1/a_2 > 10$ (その逆数 $a_2/a_1 < 0.1$) では、副き裂の存在による主き裂の F_{II, A_1} に与える影響は 1.2% 以下となり、副き裂が主き裂端 A_1 の応力拡大係数に与える影響は殆ど無い。従って、副き裂の存在が主き裂端 B_1 の応力拡大係数のみに与える影響を調べることができる。

Fig. 10、11は、主き裂に対する副き裂の長さ比 $a_2/a_1 = 0.1$ に固定し、面内せん断を受ける場合につい

て副き裂の角度 $-\beta$ に対する主き裂および副き裂の無次元応力拡大係数を示したものである。なお、Fig. 10は主き裂端 B_1 を中心に副き裂を回転させた場合であり、Fig. 11は副き裂を中心に回転させた場合である。

副き裂の F_{II, A_2} 、 F_{II, B_2} は Fig. 10、11のいずれも $-\beta = 0^\circ$ で最大値となり、 F_{I, A_2} 、 F_{I, B_2} は Fig. 10では $-\beta = 60^\circ$ 付近で最大、Fig. 11では $-\beta = 45^\circ$ 付近で最大となる。

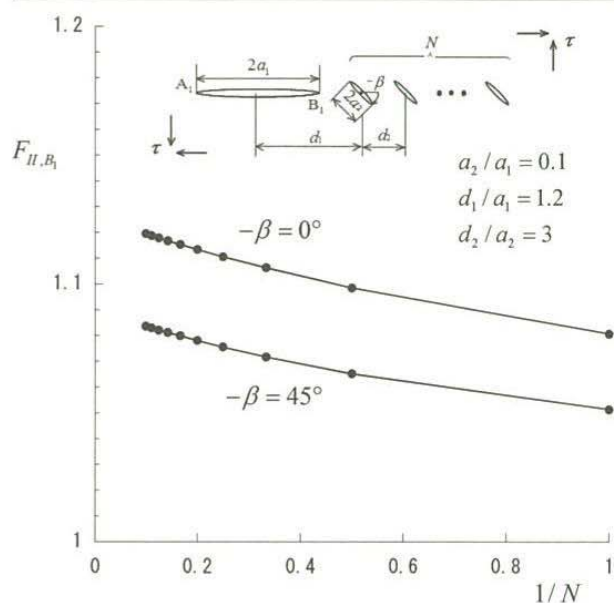
Fig. 12 F_{II, B_1} , $1/N$ -relations.

Fig. 12は、き裂の長さ比 $a_2/a_1=0.1$ に固定し、副き裂の角度 $-\beta = 0^\circ, 45^\circ$ における主き裂の無次元応力拡大係数 F_{II, B_1} と副き裂の個数の逆数 $1/N$ の関係を示したものである。主き裂の F_{II, B_1} は、 $-\beta$ のいずれの場合も副き裂の個数 N の増加で増大する。また F_{II, B_1} は、副き裂の個数 N の増加でその逆数 $1/N$ と良い直線関係にあることが分かる。

4. 結 論

- (1) 面内せん断を受ける無限板にき裂群が任意に分布する場合について体積力法による高精度応力解析法を開発した。
- (2) 本法を用いて面内せん断下での平行傾斜き裂群の無次元応力拡大係数および微小き裂群の存在に

よるマクロき裂の無次元応力拡大係数の結果を与えた。

- (3) 等長の平行傾斜き裂群では、各き裂の応力拡大係数はき裂の傾斜角度に関係なくき裂個数の逆数 $1/N$ と良い直線関係にある。この関係は、微小な等長き裂群の存在によるマクロき裂の応力拡大係数の場合にも適用できる。

参考文献

- (1) 石田・井川、久留米工業大学研究報告、No. 15 (1991)、pp. 11-28.
- (2) 石田・井川、日本機械学会論文集、58A-553 (1992)、pp. 1642-1649.
- (3) 石田・井川、日本機械学会論文集、59A-561 (1993)、pp. 1262-1269.
- (4) M. Isida, H. Igawa, International Journal of Fracture Vol. 65 (1994)、pp. 247-259.
- (5) 井川・平野、日本機械学会講演論文集、No. 95-5 (1999)、pp. 421-422.
- (6) 井川・野田、日本機械学会講演論文集、No. 008-1 (2000)、pp. 175-176.
- (7) 井川・野田、日本機械学会講演論文集、No. 00-1 (2000)、pp. 79-80.
- (8) 井川、日本機械学会講演論文集、No. 005-2 (2000)、pp. 53-54.
- (9) 井川・隈部・野田、日本機械学会講演論文集、No. 01-1 (2001)、pp. 135-136.
- (10) 石田・向野、日本機械学会論文集、48A-428 (1982)、pp. 423-430.
- (11) 井川、久留米工業大学研究報告、No. 31 (2008)、pp. 15-20.