

〔論 文〕

車体に作用する偏在荷重または外力による4輪タイヤの上下荷重変化の簡易計算法

森 和典^{*1}・梶山項羽市^{*1}

Simplified Calculation Method for Load Change in Vertical Direction of Each Tire by Uneven Distribution Load or External Force Applied on a Vehicle Body

Kazunori MORI^{*1}, Kouichi KAJIYAMA^{*1}

Abstract

We propose a simplified method to estimate the load change of each tire in the vertical direction due to an uneven distribution load or external force acting on a vehicle body using Microsoft Excel. The calculated results were comparable to the results obtained in an experiment using a physical vehicle. Thus, we were able to demonstrate the validity of our proposed method.

Key Words : Automobile, Suspension, Spring, Wheel Load Distribution, Uneven Distribution Load

1. まえがき

自動車の設計に際して、サスペンションばねやタイヤ等の装置・部品設計におけるタイヤ輪荷重計算は、車体の姿勢変化および車両運動性能に大きく影響するために重要な設計要件のひとつである⁽¹⁾。一般的に自動車は空車時の左右輪荷重がほぼ等しいため、前・後軸荷重の設計値を2等分してタイヤ輪荷重を計算しても差し支えない。積車時も左右輪間の荷重差は考慮せずに前後輪分担荷重を求めて空車時のタイヤ輪荷重に単純に上乘せして計算する機会が多い⁽²⁾。

しかし、乗員または荷物の荷重作用点が車体を左右に分ける車体中心線上にないときに（ここでは偏在荷重と呼ぶ）、車体姿勢をサスペンションばね特性で調整する場合には、できるだけ精度良く四輪のタイヤ上下荷重を求めなければならない。さらに、前後・左右・上下加速度およびヨー・ピッチ・ロールモーメントが生じる走行状態における四輪分担荷重の計算、車体周りの空気流により空力デバイス等に発生する空気力が偏在外力として車体に作用する時のタイヤ上下荷重変化などを計算する際にも簡便な計算方法が必要となる。

偏在荷重または外力によるタイヤ荷重を高精度で計算する方法として、車体を支えるサスペンションの構成を含めたFEM等による構造解析がある。しかし、膨大な計算データが必要であり計算時間もコストもかかるため、設計初期段階での検討用には適さない。こうした背景から比較的精度が良い単純な計算手法が望まれる。

本報告では、車体に偏在荷重または外力が作用した時のタイヤ上下荷重を求める簡易な計算式を導出して表計算ソフトEXCELによる計算を可能にしたこと、およびその計算結果が実車実験の結果とほぼ一致し計算式の妥当性を得たことについて概要を記す。

なお、本内容は大学機械工学教育の材料力学・機械力学における「不静定」⁽³⁾の考え方を学ぶために格好の実験用教材と考えられるために、実車実験では簡単な測定器具を用いる方法を試みている。

2. 計算式の導出

図1に示すように、車体重心を原点 o とする $o-xyz$ 座標系を考える。原点 o を含み接地面に平行な面を L とすると、 xy 軸は L 上にあり、 z 軸は L に対して垂直とする。なお、原点 o は初期の車体重心位置とする。

いま、車体に働く偏在荷重または外力 \mathbf{F}_{aj} の作用点座標を $[x_{aj} \ y_{aj} \ z_{aj}]^T$ 、3方向力は、 $\mathbf{F}_{aj} = [F_{ajx} \ F_{ajy} \ F_{ajz}]^T$ で表わす。た

^{*1} 交通機械工学科
平成29年10月30日受理

だし、添字 j は偏在荷重または外力に付した通し番号である。

次に、タイヤ接地荷重の作用点である接地中心座標を $[x_i, y_i, z_i]^T$ 、接地荷重 \mathbf{F}_i の3方向力は $\mathbf{F}_i = [F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}]^T$ とする。 \mathbf{F}_{aj} により生じるタイヤ接地荷重の変化を $\Delta\mathbf{F}_i$ とすると、

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i0} + \Delta\mathbf{F}_i = [F_{ix0} + \Delta F_{ix}, F_{iy0} + \Delta F_{iy}, F_{iz0} + \Delta F_{iz}]^T \quad (1)$$

の関係がある。ただし、添字 i は各輪を表し、1：右前輪 2：右後輪 3：左前輪 4：左後輪とする。添字 0 は初期値を示す。

また、車体を支持するサスペンションばね力 \mathbf{F}_{bi} の作用点座標を $[x_{bi0}, y_{bi0}, z_{bi0}]^T$ 、3方向力は $\mathbf{F}_{bi} = [F_{bix}, F_{biy}, F_{biz}]^T$ とする。 \mathbf{F}_{bi} により生じるタイヤ接地荷重の変化を $\Delta\mathbf{F}_{bi}$ とすると、式(1)と同様に次式の関係がある。

$$\mathbf{F}_{bi} = \mathbf{F}_{bi0} + \Delta\mathbf{F}_{bi} = [F_{bix0} + \Delta F_{bix}, F_{biy0} + \Delta F_{biy}, F_{biz0} + \Delta F_{biz}]^T \quad (2)$$

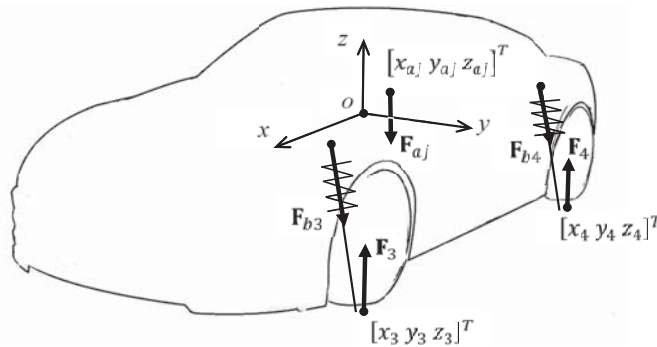


Fig.1 Analysis model

2・1 3方向分力を有する偏在荷重の場合

原点 o を始点とする m 個の偏在荷重の作用点とタイヤ接地中心の位置ベクトルをそれぞれ \mathbf{r}_{aj} 、 \mathbf{r}_i で表わすと $\mathbf{r}_{aj} = [x_{aj}, y_{aj}, z_{aj}]^T$ 、 $\mathbf{r}_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ で与えられる。

\mathbf{F}_{aj} と $\Delta\mathbf{F}_i$ において、力のつりあいとモーメントのつりあいを考えると次の2式を得る。

$$\sum_{i=1}^4 \Delta\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^m \mathbf{F}_{aj} = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_i \times \Delta\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^m \mathbf{r}_{aj} \times \mathbf{F}_{aj} = \mathbf{0} \quad (4)$$

式(3)の z 方向成分より

$$\Delta F_{1z} + \Delta F_{2z} + \Delta F_{3z} + \Delta F_{4z} = - \sum_{j=1}^m F_{ajz} \quad (5)$$

の関係が成り立つ。

また、式(4)において

$$\mathbf{r}_i \times \Delta\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta F_{ix} \\ \Delta F_{iy} \\ \Delta F_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \Delta F_{iz} - z_i \Delta F_{iy} \\ z_i \Delta F_{ix} - x_i \Delta F_{iz} \\ x_i \Delta F_{iy} - y_i \Delta F_{ix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i \alpha_{Gz} - z_i \alpha_{Gy} \\ z_i \alpha_{Gx} - x_i \alpha_{Gz} \\ x_i \alpha_{Gy} - y_i \alpha_{Gx} \end{bmatrix} \Delta F_{iz} \quad (6)$$

ただし、タイヤ上下荷重の変動を ΔW_i と表わし、 x 、 y 、 z 方向の加速度をそれぞれ a_x 、 a_y 、 a_z 、加速度比を $\alpha_{Gx} = a_x/g$ 、 $\alpha_{Gy} = a_y/g$ 、 $\alpha_{Gz} = a_z/g$ と記すと、

$$\begin{cases} \Delta F_{ix} = \frac{\Delta W_i}{g} a_x = \frac{\Delta F_{iz}}{g} a_x = \Delta F_{iz} \alpha_{Gx} \\ \Delta F_{iy} = \frac{\Delta W_i}{g} a_y = \frac{\Delta F_{iz}}{g} a_y = \Delta F_{iz} \alpha_{Gy} \end{cases} \quad (7)$$

および $a_z = g$ 、 $\alpha_{Gz} = 1$ 、 $\Delta F_{iz} = \Delta W_i$ の関係がある。

また、偏荷重によるモーメントは

$$\mathbf{r}_{aj} \times \mathbf{F}_{aj} = \begin{bmatrix} x_{aj} \\ y_{aj} \\ z_{aj} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_{ajx} \\ F_{ajy} \\ F_{ajz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{aj} \Delta F_{ajz} - z_{aj} \Delta F_{ajy} \\ z_{aj} \Delta F_{ajx} - x_{aj} \Delta F_{ajz} \\ x_{aj} \Delta F_{ajy} - y_{aj} \Delta F_{ajx} \end{bmatrix} \quad (8)$$

となる。

式(6)と式(8)を代入した式(4)の x , y 方向成分により、それぞれ次式が得られる。

$$\sum_{i=1}^4 (y_i - z_i \alpha_{Cy}) \Delta F_{iz} = \sum_{j=1}^m (z_{aj} F_{ajy} - y_{aj} F_{ajz}) \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^4 (x_i - z_i \alpha_{Cx}) \Delta F_{iz} = \sum_{j=1}^m (z_{aj} F_{ajx} - x_{aj} F_{ajz}) \quad (10)$$

ここで、 $\Delta F_{1z} \sim \Delta F_{4z}$ に関する方程式は、式(3)の z 方向成分と式(4)の3方向成分の計4式となるが、変形整理すると従属式が1つ存在するため独立な式は $4 - 1 = 3$ となる。つまり、4つの未知数 F_{jz} に対して方程式が3つであり解を確定するためには1つ不足することになる。力とモーメントのつり合いだけでは問題が解けないため、不足分の式は変位の関係から求めなければならない。こうした不静定問題を解くためには4輪のばね変位に関する方程式が必要となる。

接地中心位置における車体の上下方向変位 δ_{wi} を (ホイール端変位)、ばね定数 (ホイール端ばね定数と呼ぶ) を k_{wi} とおくと、

$$\Delta F_{iz} = -k_{wi} \delta_{wi} \quad (11)$$

$$z_i = z_{i0} + \delta_{wi} \quad (12)$$

の関係がある。ただし、 δ_{wi} の符号は、サスペンションばねが伸びの方向を正とし、縮みの方向を負とする。

例えば、**図2**に示すようにサスペンションばね反力の作用点①～④の4位置が平面 L 上に存在すると仮定する。偏在荷重により4つのばねが変位した後も点①～④は同一平面上にある。この関係を用いて変位の関係式を求める。

原点 o を始点とする点①～④の位置ベクトルをそれぞれ $\mathbf{r}_1 \sim \mathbf{r}_4$ とおくと、4点が同一平面上に存在するという条件から次式が与えられる。

$$\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{c} = \mathbf{r}_1 + s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \quad (13)$$

ただし、 $\mathbf{a} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ と $\mathbf{b} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ は方向ベクトル。 s , t は未定係数を示す。

さらに、 $\mathbf{c} = \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1$ とおくと、式(13)より

$$\mathbf{c} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b} \quad (14)$$

となる。ここで、

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \\ z_3 - z_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 - x_1 \\ y_4 - y_1 \\ z_4 - z_1 \end{bmatrix}$$

式(14)より s , t を求めて、 \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} の関係を導くと、

$$a_3(c_1 b_2 - c_2 b_1) + b_3(a_1 c_2 - a_2 c_1) = c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) \quad (15)$$

となる。

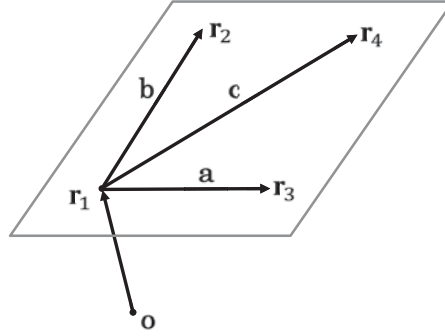


Fig. 2 Plane that position vectors of four points on which reactive force of suspension spring acts compose

簡単のために、式(14)における位置座標をタイヤ接地中心におく。 a , b は前、後輪から車両重心間距離、 t_f , t_r は前、後トレッドとすると、 $x_1 = x_3 = a$, $x_2 = x_4 = -b$, $y_1 = -t_f/2$, $y_2 = -t_r/2$, $y_3 = t_f/2$, $y_4 = t_r/2$ で与えられる。また、式(12)において $z_{10} = z_{20} = z_{30} = z_{40} = 0$ とする。つまり、 $z_i = -\delta_{wi}$ ($1 \leq i \leq 4$) になる。

これらの座標値を式(15)に代入してまとめると、

$$(\delta_{w1} - \delta_{w3}) t_r = (\delta_{w2} - \delta_{w4}) t_f \quad (16)$$

を得る。式(16)が変位に関する方程式である。

式(11)を用いて式(16)を変形すると、

$$\frac{t_r}{k_{w1}} \Delta F_{1z} - \frac{t_f}{k_{w2}} \Delta F_{2z} - \frac{t_r}{k_{w3}} \Delta F_{3z} + \frac{t_f}{k_{w4}} \Delta F_{4z} = 0 \quad (17)$$

を導くことができる。

式(5), (9), (10)および式(17)をまとめると、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 - z_1 \alpha_{Gx} & x_2 - z_2 \alpha_{Gx} & x_3 - z_3 \alpha_{Gx} & x_4 - z_4 \alpha_{Gx} \\ y_1 - z_1 \alpha_{Gy} & y_2 - z_2 \alpha_{Gy} & y_3 - z_3 \alpha_{Gy} & y_4 - z_4 \alpha_{Gy} \\ t_r/k_{w1} & -t_f/k_{w2} & -t_r/k_{w3} & t_f/k_{w4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta F_{1z} \\ \Delta F_{2z} \\ \Delta F_{3z} \\ \Delta F_{4z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{j=1}^m F_{ajz} \\ \sum_{j=1}^m (z_{aj} F_{ajx} - x_{aj} F_{ajz}) \\ \sum_{j=1}^m (z_{aj} F_{ajy} - y_{aj} F_{ajz}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

ただし、位置座標 x_i , y_i , z_i ($1 \leq i \leq 4$) は式(16)を求めた際の値を用いる。

式(18)を次のように記述する。

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{F}_{iz} = \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_{aj} \mathbf{F}_{aj} \quad (19)$$

したがって、タイヤ接地面における上下荷重の変化 $\Delta \mathbf{F}_{iz}$ は、式(19)より

$$\Delta \mathbf{F}_{iz} = \mathbf{K}^{-1} \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_{aj} \mathbf{F}_{aj} = \frac{\tilde{\mathbf{K}}}{|\mathbf{K}|} \sum_{j=1}^m \mathbf{p}_{aj} \mathbf{F}_{aj} \quad (20)$$

と導くことができる。ただし、 $\tilde{\mathbf{K}}$ は \mathbf{K} の余因子行列を示す。

2・2 上下方向のみの偏在荷重の場合

実際に利用する場合は上下方向の偏在荷重や外力の場合が多いと考えられ、本報告の実車による検証実験にも上下方向の偏在荷重を用いる。そこで、2・1項で導出された式を容易に用いることができるように簡単化する。

偏在荷重は1つとして $m = 1$ とする。また、前後、左右の加速度は0とおいて $\alpha_{Gx} = \alpha_{Gy} = 0$ とおくと、式(18)は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & -b & a & -b \\ -t_f/2 & -t_r/2 & t_f/2 & t_r/2 \\ t_r/k_{w1} & -t_f/k_{w2} & -t_r/k_{w3} & t_f/k_{w4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta F_{1z} \\ \Delta F_{2z} \\ \Delta F_{3z} \\ \Delta F_{4z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_a \\ y_a \\ 0 \end{bmatrix} F_{az} \quad (21)$$

と簡単化される.

式(21)を次のように記述する.

$$\mathbf{K}_1 \Delta \mathbf{F}_{iz} = \mathbf{p}_a F_{az} \tag{22}$$

タイヤ接地面における上下荷重の変化 $\Delta \mathbf{F}_{iz}$ は, 式(22)より

$$\Delta \mathbf{F}_{iz} = \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{p}_a F_{az} = \frac{\tilde{\mathbf{K}}_1}{|\mathbf{K}_1|} \mathbf{p}_a F_{az} \tag{23}$$

と導くことができる.

2・3 サスペンション・レバー比について

図3はサスペンション・レバー比を説明するためにサスペンション構造を単純化した図である. サスペンションのロアアームの車体側取付け点をOとし, ロアアーム延長線とタイヤ中心線の交点をAとする. また, サスペンションばねのロアアーム側取付け点をBとおく. 線分OAとOBの長さをそれぞれ l_{wi} , l_{si} とすると, サスペンション・レバー比 n は

$$n = l_{wi} / l_{si} = \delta_{wi} / \delta_{si} \tag{24}$$

と定義される⁽⁴⁾⁽⁵⁾.

サスペンションばねの変位, ばね定数およびばね反力増分をそれぞれ δ_{si} , k_{si} および ΔF_{si} とおくと, $\Delta F_{si} = -k_{si} \delta_{si}$ の関係がある. さらに, 点O回りのモーメントのつりあい式 $\Delta F_{si} l_{si} = \Delta F_{wi} l_{wi}$ と式(11)を用いると, 以下の式を導くことができる.

$$\begin{cases} \Delta F_{si} = n \Delta F_{wi} \\ k_{si} = n^2 k_{wi} \end{cases} \tag{25}$$

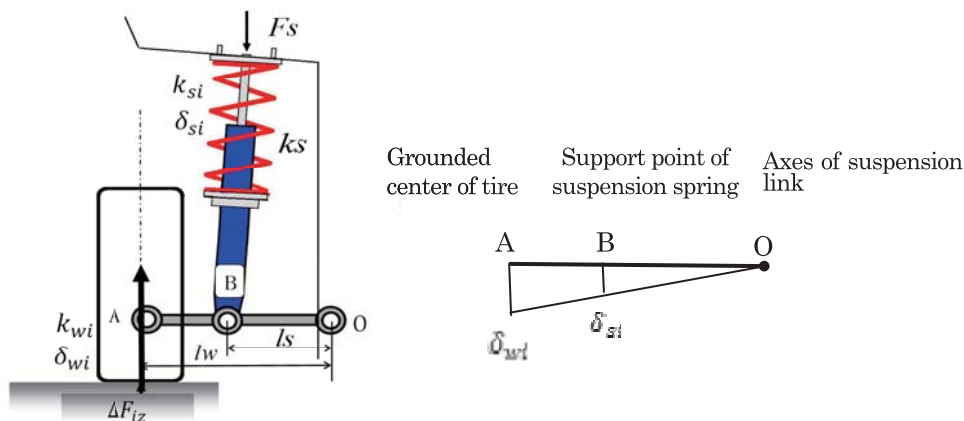


Fig. 3 Lever ratio of suspension

ここで, ホイールストローク量に相当する δ_{wi} が小さい場合, n は一定として差し支えない. しかし, δ_{wi} が大きい場合, n は一定でなくなり δ_{wi} の関数として表される. この関数を求めるにはステアリング・サスペンションのジオメトリを計算しなければならず煩雑な作業が伴う.

本来, 車体自体は4輪のサスペンションばねで支えられているため, タイヤ接地点座標とホイール端ばね定数ではなく, サスペンションばねの車体取り付け点座標とサスペンションばね定数を直接用いる方法が考えられる. 車両が静止状態のときサスペンションばね反力 F_{si} はばね上荷重に等しい. ばね上荷重, ばね下荷重ともに実測が極めて難しく設計計算上の値を用いることになるが, サスペンションばね単体の設計計算の際はこの方法が精度的に優ると考えられる.

しかし, 操縦性安定性や乗心地性能を検討する場合はホイール端ばね定数による計算が必要であり, 本報の目的である簡易計算法を構築する際の計算および実験も容易なため, これ以降もホイール端特性による方法について記す.

3. 実験および計算結果

実験は大学の工学実験の講義に供するように簡単な方法で実施した。まず、実験車両の4輪のホイール端ばね定数を測定するために、荷重条件を空車状態、1名から5名の乗車状態と6通りとして、それぞれのホイールストロークとタイヤ接地荷重を測定した。計測には鋼尺と大型ばね秤を用いた。大型ばね秤の上にタイヤを載せてタイヤに加わる上下荷重を測定した。ホイールストロークは、鋼尺を用いてホイール中心と車体のタイヤフェンダオープニング端の距離を測定し、荷重変化に伴うその距離の変化代により求めた。図4は、実験時の風景を写した画像である。なお、実験車両は一般的な乗用車（スポーツセダン）であり、計算に必要なホイールベースとトレッドは巻尺を使って計測を行った。



Fig. 4 Measurement of suspension stroke in wheel edge

次に、偏在荷重を得るために乗員1名および2名を後席の右端に座らせて実験を行った。乗員をAとBとすると、荷重（体重）はそれぞれ784[N]、568[N]である。AおよびA+B場合について4輪各々のタイヤ荷重を測定した結果と式(23)により得られる計算結果を比較した。

計算に必要な車両諸元、サスペンションばね定数、偏在荷重および着座位置座標は測定値を用いた。4輪のタイヤ荷重計算は、表計算ソフトEXCELを用いて式(23)の ΔF_{iz} を解いた。車両諸元等の計算に使用した入力データと計算結果を表1にまとめて記す。

Table 1 Vehicle specification and calculation result

wheel base [m]	2.61				
front tread [m]	1.452				
rear tread [m]	1.47				
spring constant of suspension [kN/m]	k1	k2	k3	k4	
	17.3	18.6	25.0	28.7	
uneven distribution load [N]	A	784.8		A+B	1353.8
	A	X	-0.87	A+B	X
Y		-0.46	Y		-0.48
position of uneven distribution load [m]	Calculated value [N]				
	position	FL	FR	RL	RR
	A	-48.0	230.0	193.0	410.0
A+B	-91.0	405.5	323.0	717.0	

図5は、偏在荷重を加えた場合の4輪のタイヤ荷重変動の実測値と計算値を比較したグラフである。乗員1名および2名のいずれの場合も実測値と計算値の荷重分布の傾向はよく一致している。しかし、乗員の体重と4輪の荷重変動の和が一致せず、4輪の荷重変動和の方が約50[N]大きくなった。これは測定器具の読み取り精度や実験方法による誤差と考えられる。このように測定器具の精度や実験方法に課題が残るものの、荷重変動の大きさも概ね一致していると判断される。

以上の実験結果により、提案の簡易計算式および EXCEL を使用した解法の妥当性を得ることができた。

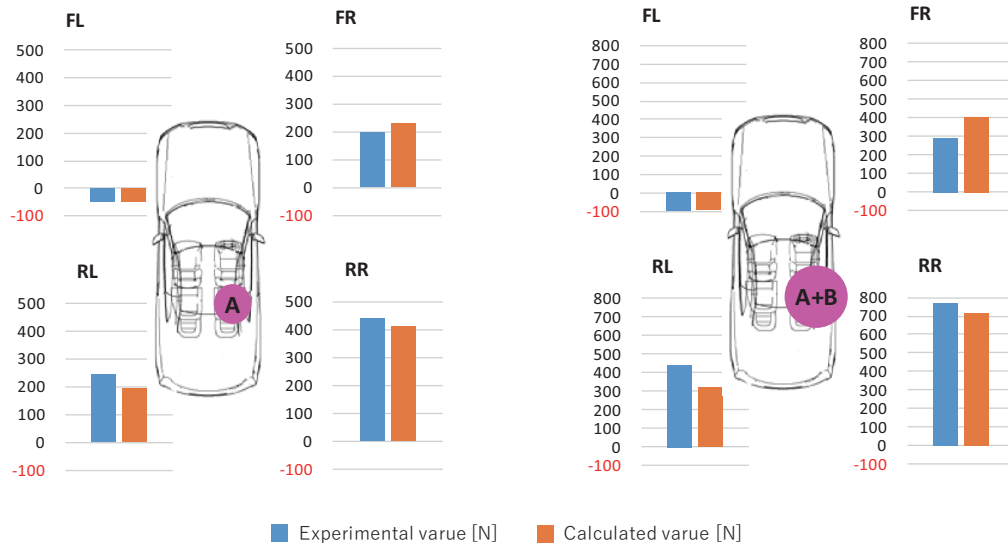


Fig. 5 Experimental result

4. まとめ

車体に作用する偏在荷重または外力による4輪タイヤの上下荷重変化の簡易な計算方法を検討して以下の結果を得た。

- (1) 車体に偏在荷重または外力が作用するとき、4輪のホイール端ばね定数とタイヤ接地中心座標を基礎データにして不静定問題を解くことにより、各輪タイヤの上下荷重変化を求める簡易な計算式を導出した。この計算式は表計算ソフト EXCEL を用いて容易に解くことができる。
- (2) (1)を用いた計算結果は実車実験の結果とほぼ一致し、簡易計算式の妥当性を得た。

今回の実験内容は、大学機械工学教育の材料力学・機械力学における「不静定」の考え方を習得させるために格好の実験教材と考えられるため、実車実験では簡単な測定器具を用いる方法を試みた。しかし、実験の精度上、実験方法に関していくつかの課題があることも判明した。今後は、実験方法の一部見直しおよび実験条件・車両変更による実験データの採取を増やして再評価を試みる予定である。

文 献

- (1) 藤岡健彦・鎌田実, 自動車プロジェクト開発工学 (2001), pp. 142-155, 技報堂出版.
- (2) 宇野高明, 車両運動性能とシャシーメカニズム (1994), pp. 182-185, グランプリ出版.
- (3) 齊藤渥・平井憲雄, 詳解材料力学演習 (上) (1972), pp. 260-267, 共立出版.
- (4) 森和典, “3次元機構解析によるバルクランク式サスペンションの入出力特性計算法に関する検討”, 久留米工業大学研究報告, No. 38 (2015), pp. 8-20.
- (5) 森和典, “走行系の統合制御を適用した車両の運動性能”, 日本機械学会論文集, 68-671, C (2002), pp. 172-179