

〔論文〕

# 自転車の安定化制御

岩橋 廣幸<sup>\*1</sup>・山本 俊彦<sup>\*2</sup>・松尾 重明<sup>\*2</sup>

Improved Bicycle Attitude Control Using a Balance Arm

Hiroyuki IWAHASHI, Toshihiko YAMAMOTO and Shigeaki MATSUO

## Abstract

Bicycles are convenient vehicles for everyone, but they are inherently unstable systems which can fall down easily. This paper deals with the attitude control of a bicycle equipped with a balance arm. Dynamic equations of a bicycle model are derived using the Lagrangian formulation. The bicycle system is simulated by the use of a State-feedback control method. Computer Simulation shows that the bicycle system is stabilized by the reactions of the balance arm.

## 要 旨

自転車は誰でも気軽に乗ることのできる乗り物であるが、左右に倒れやすい不安定な系である。この論文ではバランスアームを搭載した自転車の姿勢制御について扱っている。自転車モデルの運動方程式をラグランジュの方法で導出し、状態フィードバック制御法でシミュレーションを行った。バランスアームの反動でシステムが安定することをシミュレーションで確認した。

## 1. 諸 言

1817年に発明された自転車は誰でも気軽に乗ることのできる乗り物である。自転車は左右に倒れやすい不安定な系であるが、人間は経験により微妙なハンドル操作と重心移動で自転車の運転を行っている。

二輪車の姿勢制御に関してはジャイロセンサとハンドル操作で安定化させる方法<sup>1)</sup>、車体に搭載したバランスアームの反動トルクによって姿勢を制御する方法<sup>2)</sup>、ハンドル操作のみを使った安定走行制御法<sup>3)</sup>、などがある。

自転車を数学モデルで表現する場合、ハンドルの回転角、自転車の推進力、車体の傾きを考える必要がある。また、車体の傾きと人の傾きは直列二重倒立振子と見なすことができる。

本論文では自転車のハンドル操作と重心移動によって自転車を安定させることを目的とする。その第一段階として、ハンドルを固定した自転車に、人

に代わってモータとバランスアームを搭載し、自転車の安定化制御を行い、計算機シミュレーションで重心移動の有効性を確認する。

## 2. 自転車の運動方程式

### 2.1 バランスアームを搭載した自転車

本論文で使用する自転車の概略図を図1に示す。車体には、モータ、エンコーダ、バランスアームが搭載され、バランスアームを動かすことによって生

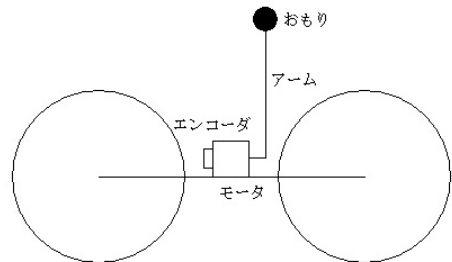


図1 自転車の概略図

<sup>\*1</sup>大学院エネルギーシステム工学専攻  
平成24年1月30日受理

<sup>\*2</sup>機械システム工学科

じる反動トルクで自転車を安定させる。バランスアームの角度は、バランスアームを動かすためのサーボモータに取り付けてあるエンコーダで検出する。

## 2.2 モデリング

バランスアームを搭載した自転車のモデルを図2に示す。

図2の $G_1$ は自転車の重心、 $O_M$ はモータの位置、 $G_2$ はバランスアームの重心である。バランスアームの重心については、先端に取り付けたおもりによって代表させる。また、モータは車体と一体となっているものとする。

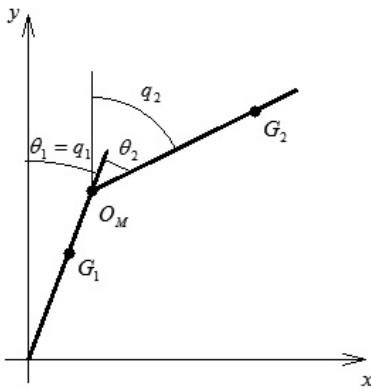


図2 自転車のモデル

本論文の解析で用いた記号は次の通りである。なお、座標 $(x, y)$ はタイヤと床との接地点 $O$ を原点とする座標である。

$G_1(x_1, y_1)$ : 車体の重心

$G_2(x_2, y_2)$ : バランスアームの重心

$m_1$ : 車体の質量 [kg]

$m_2$ : バランスアームの質量 [kg]

$I_1$ : 車体の重心まわりの慣性モーメント [kgm<sup>2</sup>]

$I_2$ : おもりの重心まわりの慣性モーメント [kgm<sup>2</sup>]

$L$ : 床からモータ回転軸までの長さ [m]

$L_1$ : 床から車体の重心までの長さ [m]

$L_2$ : バランスアームの等価的長さ [m]

$q_1$ : 車体の絶対角 [rad]

$q_2$ : バランスアームの絶対角 [rad]

$\theta_1$ : 車体の相対角 ( $=\theta$ ) [rad]

$\theta_2$ : バランスアームの相対角 ( $=\alpha$ ) [rad]

$u$ : モータへの入力電圧 [v]

$\theta_M$ : モータの回転角 [rad]

$I_M$ : モータの慣性モーメント [kgm<sup>2</sup>]

$K_T$ : トルク定数 [Nm/A]

$K_L$ : 誘起電圧定数 [vs/rad]

$R$ : 電機子抵抗 [ $\Omega$ ]

$\tau$ : 反動トルク [Nm]

$g$ : 重力加速度 [m/s<sup>2</sup>]

## 2.3 運動方程式

ここではラグランジュの方法により自転車の運動方程式を導出する。図2において車体とバランスアームの角度を $q_1, q_2$ とすると、車体 $m_1$ の重心位置 $G_1$ は

$$x_1 = L_1 \sin q_1 \quad (1)$$

$$y_1 = L_1 \cos q_1 \quad (2)$$

となり、車体 $m_1$ の運動エネルギー $K_1$ は

$$K_1 = \frac{1}{2} (I_1 + m_1 L_1^2) \dot{q}_1^2 \quad (3)$$

となる。また、車体 $m_1$ の位置エネルギー $P_1$ は次式となる。

$$P_1 = m_1 g L_1 \cos q_1 \quad (4)$$

同様にバランスアーム $m_2$ の重心位置 $G_2$ は

$$x_2 = L \sin q_1 + L_2 \sin q_2 \quad (5)$$

$$y_2 = L \cos q_1 + L_2 \cos q_2 \quad (6)$$

となり、運動エネルギー $K_2$ は

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 L^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} (I_2 + m_2 L_2^2) \dot{q}_2^2 + m_2 L L_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2 - q_1) \quad (7)$$

となる。また、バランスアーム $m_2$ の位置エネルギー $P_2$ は次式となる。

$$P_2 = m_2 g (L \cos q_1 + L_2 \cos q_2) \quad (8)$$

式(3)と(7)より、系全体の運動エネルギー $K$ は

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} J_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{q}_2^2 + a \dot{q}_1 q_2 \cos(q_2 - q_1) \quad (9)$$

となる。ただし

$$J_1 = I_1 + m_1 L_1^2 + m_2 L^2$$

$$J_2 = I_2 + L_2^2$$

$$a = m_2 L L_2 \quad (10)$$

である。また、式(4)と(8)より、系全体の位置エネル

ギー  $P$  は

$$\begin{aligned}
 P &= P_1 + P_2 \\
 &= (m_1 L_1 + m_2 L) g \cos q_1 \\
 &\quad + m_2 L_2 g \cos q_2
 \end{aligned} \tag{11}$$

となり、ラグランジュ関数  $L$  は

$$\begin{aligned}
 L &= K - P \\
 &= \frac{1}{2} J_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{q}_2^2 \\
 &\quad + m_2 L L_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_2 - q_1) \\
 &\quad - (m_1 L_1 + m_2 L) g \cos q_1 \\
 &\quad - m_2 L_2 g \cos q_2
 \end{aligned} \tag{12}$$

となる。

ラグランジュの方法により車体  $m_1$  およびバラン  
スアーム  $m_2$  の運動方程式を求めると次式となる。

$$\begin{aligned}
 J_1 \ddot{q}_1 + a q_2 \cos(q_2 - q_1) \\
 - a \dot{q}_2^2 \sin(q_2 - q_1) \\
 - (m_1 L_1 + m_2 L) g \sin q_1 = -\tau
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 a q_1 \cos(q_2 - q_1) + J_2 \ddot{q}_2 \\
 + a \dot{q}_1^2 \sin(q_2 - q_1) \\
 - m_2 L_2 g \sin q_2 = \tau
 \end{aligned} \tag{14}$$

ここで、絶対角に関する運動方程式を相対角に関する  
運動方程式に変換する。式(13)と(14)に  $q_1 = \theta_1 = \theta$  ,  $q_2$   
 $= \theta_1 + \theta_2 = \theta + \alpha$  を適用する。また、反動トルク  $\tau$  は  
モータの特性より

$$\tau = -I_M \alpha + \frac{K_T}{R} u - \frac{K_T K_L}{R} \dot{\alpha} \tag{15}$$

である。

以上の関係を用いて線形化すると次式となる。

$$\begin{aligned}
 (J_1 + a) \ddot{\theta} + (a - I_M) \ddot{\alpha} - \frac{K_T K_L}{R} \dot{\alpha} \\
 - (m_1 L_1 + m_2 L) g \theta = -\frac{K_T}{R} u
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 (J_2 + a) \ddot{\theta} + (J_2 + I_M) \ddot{\alpha} + \frac{K_T K_L}{R} \dot{\alpha} \\
 - m_2 L_2 \sin(\theta + \alpha) = \frac{K_T}{R} u
 \end{aligned} \tag{17}$$

ここで、状態変数を

$$\mathbf{x} = (\theta, \alpha, \dot{\theta}, \dot{\alpha})^T \tag{18}$$

とすれば、式(16)と(17)は次式のように記述される。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \tag{19}$$

ただし、行列  $\mathbf{A}$  と  $\mathbf{B}$  は次式となる。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ P_1 & P_2 & 0 & P_4 \\ q_1 & q_2 & 0 & q_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_5 \\ q_5 \end{bmatrix} \tag{20}$$

### 3. 制御手法とパラメータ

#### 3.1 状態フィードバック制御<sup>1)</sup>

式(19)の状態方程式で自転車が安定に制御できるか  
をシミュレーションにより確認する。本論文では制  
御手法として状態フィードバック制御を用いた。制  
御力  $u$  は状態変数に定数をかけた次の形で与える  
(図3)。

$$u = \mathbf{Kx} \tag{21}$$

ただし、フィードバック係数行列  $\mathbf{K}$  は

$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] \tag{22}$$

である。

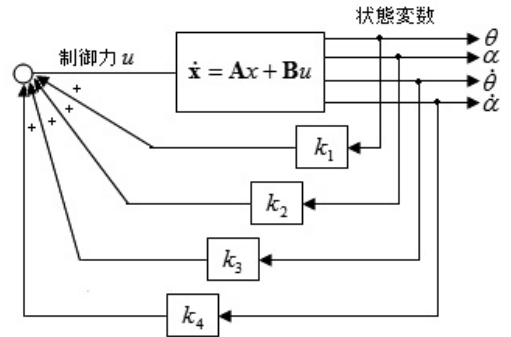


図3 状態フィードバック系のブロック線図

#### 3.2 極配置法によるフィードバック係数の決定

対象となる自転車の物理パラメータに具体的な数  
値を与え、極配置法によりフィードバック係数を決  
定する。なお、物理パラメータは表1の文献<sup>(2)</sup>の値  
を用いた。

表1 物理パラメータ

$m_1$	5.23 [kg]
$m_2$	0.470 [kg]
$I_1$	0.0421 [kgm <sup>2</sup> ]
$I_2$	0
$L$	0.283 [m]
$L_1$	0.237 [m]
$L_2$	0.792 [m]
$I_M$	0.102 [kgm <sup>2</sup> ]
$K_T$	6.02 [Nm/A]
$K_L$	6.02 [vs/rad]
$R$	2.80 [Ω]

物理パラメータを式(16)と(17)に代入すると行列(20)は次の値となる。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 28.2 & -0.0607 & 0 & 27.4 \\ -19.3 & 9.25 & 0 & -60.2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4.55 \\ 10.0 \end{bmatrix}$$

特性根を  $-1 \pm 2j$ 、 $-1 \pm 2j$  として状態フィードバック係数を求めると、制御力  $u$  は次式となる。

$$u = 257\theta + 55.1\alpha + 57.8\dot{\theta} + 25.3\dot{\alpha} \quad (24)$$

## 4. シミュレーション

### 4.1 シミュレーションの方法

本システムの目標は車体、バランスアーム共に垂直に保たれている状態、すなわち  $\theta = 0$  [rad]、 $\alpha = 0$  [rad]、 $\dot{\theta} = 0$  [rad/s]、 $\dot{\alpha} = 0$  [rad/s] である。また、すべての状態変数が0の状態は、この制御系のただ1つの平衡点である。

車体が右へ  $0.1$  [rad] 傾き、バランスアームは車体に対して平行な位置にある状態 ( $\theta = 0.1$ 、 $\alpha = 0$ 、 $\dot{\theta} = 0$ 、 $\dot{\alpha} = 0$ ) を初期状態としてシステムに与える。なお、微分方程式の解法はルンゲクッタ法により刻み時間  $0.01$  [s] で実行した。

### 4.2 シミュレーション結果

図4に車体の傾き  $\theta$  とバランスアームの振れ角  $\alpha$  の変化を示す。

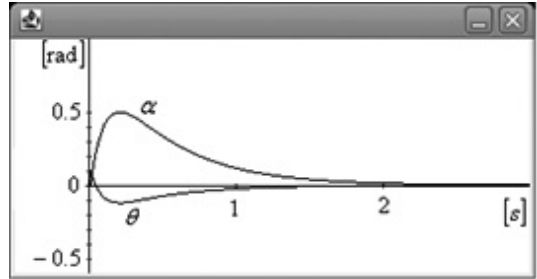


図4 シミュレーション結果

図4より次のことがわかる。

- (1) この制御系は安定であり、約2秒後に  $\theta$ 、 $\alpha$  は共に  $0$  [rad] に収束し、自転車は垂直に立つ。
- (2) 車体はバランスアームとは逆方向に動き、バランスアームの振れ角は車体より大きい。

### 4.3 アニメーションによる確認

自転車の動きが視覚的にわかり易いように、Java言語でアニメーションを作成した。

図5から図8は自転車を正面から見たアニメーション図で、図5は初期状態、図6から図8は途中の状態、図9は安定し、垂直に立った状態である。

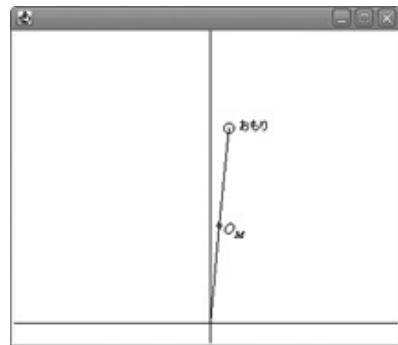


図5 初期状態

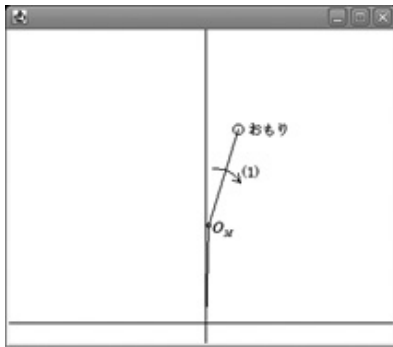


図6 自転車の動き (0.02[s])

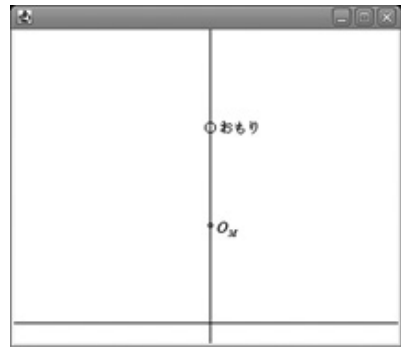


図9 安定状態 (2.0[s])

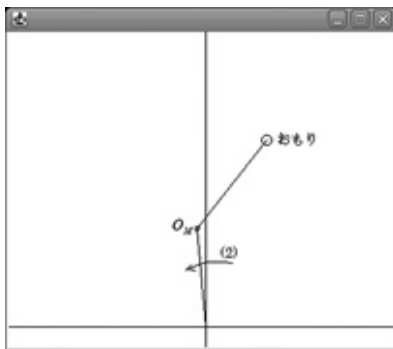


図7 自転車の動き (0.2[s])

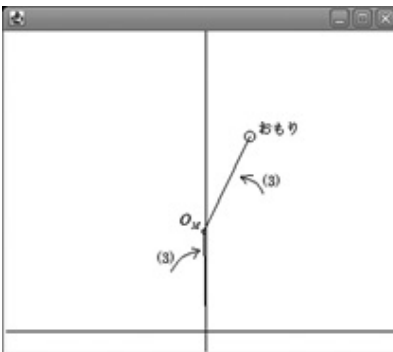


図8 自転車の動き (0.8[s])

自転車を安定に制御するために、まず、図6のように車体の傾いている方向にバランスアームを大きく動かす。この反動で図7のように車体が起き上がり、図9のように、バランスアームを戻すと安定な直立状態に収束する。

### 5. 結 言

自転車の練習を始めた子供は、最初に車体とは逆方向に体を傾ける。一見この方法が車体が安定して安全な動作に思えるが、車体が傾いているため非常に不安定である。

本研究ではハンドルを固定した自転車の数式モデルでシミュレーションを行い、バランスアームのみで車体の制御が可能であることを確認した。しかし、実際の自転車はハンドル操作が可能で、さらに前進することもできる。ハンドルや推進機能を付加した実際の自転車に近いモデルの作成は今後の課題としたい。

### 参考文献

- (1) 佐藤・宮下, 計測自動制御学会論文集, 17 4 (1981), 64 .
- (2) 吉田・ほか3名, 松江高専研究紀要, 第35号 (2000), 11 .
- (3) 山口・ほか2名, 精密工学会誌, 74 5 (2008), 509 .
- (4) 末松良一, 図解メカトロニクス入門シリーズ機械制御入門, (1998), 92, オーム社 .