〔研究随想〕

数学教育における重心の概念について

渋谷　憲政

The Concept of a Center of Gravity in Mathematical Education

Norimasa SHIBUTANI

Abstract

In mathematical education, the center of gravity of a triangle is defined as follows: the three medians of a triangle are concurrent, and the point of concurrency is called the center of gravity or centroid of the triangle. However, the term “center of gravity” has a physical meaning as well. In mathematical education, when discussing a triangle’s center of gravity, it is necessary to differentiate between the kind of material which is used to construct the triangle. This paper shows how the centroid of a triangle differs if it is constructed from mass points, boards, or wire. This paper also shows how the relationship between internal dividing points, external dividing points, concentration, average, expectations and Ceva’s theorem are unified through the concept of centre of gravity.

Key Words : a center of gravity of triangle, mathematical education

1　はじめに

三角形の重心は，中学校第 3 学年と高校学校第 1 学年で学習する．そこでは,「三角形の 3 つの中線の交点を，その三角形の重心という」と定義されている．三角形の重心と言ったとき，頂点に重りを乗せた質点の重心もある，三角形が平板でできている板の重心もある，三角形の辺が針金のような線でできている重心もある．中学校や高校学校で学ぶ重心は，この 3 つのどれを意味しているのかわからない．教科書に詳しい説明はない．学習者が漠然とした不安を感じるのも自然なことである．我々はこの 3 つの重心を区別して，それぞれ,「質点としての重心」,「面としての重心」,「線としての重心」と呼ぶことにする．この 3 つの重心の違いを明確にする．また，重心の概念が内分点，外分点，濃度，期待値，ベクトルの問題，チェバの定理など多くの数学の問題と関係していることを示す．特にベクトルの問題では重心の概念を用いると問題が簡単に解ける．

2　重心の概念

2.1　質点としての重心

数直線上の点 $x = 1$ に質量 3 があり，点 $x = 5$ に質量 1 があった場合，$x = 2$ の点をもつとつり合う．このつり合う点 (重心) では，(腕の長さ)×(質量) が等しい．重心の概念はこの簡単な原理からすべて導かれる．一般に数直線上の点 $x = x_1$ に質量 m_1 があり，点 $x = x_2$ に質量 m_2 があった場合，重心の位置 $\bar{x}$ は

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

* 教育創造工学科
平成27年12月 9 日受理

である．ただし，$m_1>0,\ m_2>0$ とする．

定義 1 (質点系の合成)

質点とは質量をもった点のことで，質点を「位置と質量」の対として表す．すなわち，数直線上の位置 x と質量 $m>0$ に対して，質点を (x,m) で表す．2 つの質点 (x_1,m_1) と (x_2,m_2) に対して，その和を

$$(x_1,m_1)\oplus(x_2,m_2)\equiv\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2},\ m_1+m_2\right)$$

で定義する．これを質点系の合成と呼ぶ．

命題 1

質点系の合成に対して次のことが成立する．

(1) $(x_1,m_1)\oplus(x_2,m_2)=(x_2,m_2)\oplus(x_1,m_1)$　$\cdots$　(加法の交換法則)

(2) $\{(x_1,m_1)\oplus(x_2,m_2)\}\oplus(x_3,m_3)=(x_1,m_1)\oplus\{(x_2,m_2)\oplus(x_3,m_3)\}$　$\cdots$　(加法の結合法則)

(3) $(x_1,m_1)\oplus(x_2,m_2)=(\bar{x},m_1+m_2)$ とおく．$k\neq 0$ に対して，$(x_1,km_1)\oplus(x_2,km_2)=(\bar{x},km_1+km_2)$

【証明】明らか．　□

(注意)　2 つの質点を合成すると 2 つの質点が消えて 1 つの質点になる．(1),(2) は 3 つの質点があった場合，どの 2 つの質点から合成しても重心の位置は変わらないことを示している (1)．(3) は全体の質量を k 倍しても重心の位置は変わらないことを示している．n 個の質点の合成も同様である．

xy 平面上の 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ に対して，点 A に質量 m があり，点 B に質量 n があるとする．このとき，重心 G は線分 AB を $n:m$ に内分する．すると x 成分も，y 成分も $n:m$ に内分される．従って，

$$\mathrm{G}(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{mx_1+nx_2}{m+n},\ \frac{my_1+ny_2}{m+n}\right)$$

となる．一般に n 個の点 $\mathrm{A}_j(x_j,\ y_j)$ があった場合，各点に質量 $m_j>0$ を乗せると重心 $\mathrm{G}(\bar{x},\bar{y})$ は

$$\mathrm{G}(\bar{x},\bar{y})=\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n},\ \frac{m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}\right)$$

となる．どの 2 点から合成してもよい．

2.2　面としての重心

まず 1 次元の連続量の重心を考える．数直線上の閉区間 $[a,b]$ において，質量密度関数 $f(x)$ が与えられているとする．区間 $[a,b]$ を n 分割し，$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ とする．区間 $[x_{i-1},x_i]$ の質量はほぼ $m_i=f(x_i)(x_i-x_{i-1})$ に等しい．離散的な場合の質点としての重心の式より，$[a,b]$ におけるこの物質の重心が次のように得られる．

$$\bar{x}=\lim_{n\to\infty}\bar{x}_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_if(x_i)(x_i-x_{i-1})}{\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(x_i-x_{i-1})}=\frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

次に 2 次元平面における連続量の重心を考える．xy 平面での領域を D とする．ただし，ここでは領域 D と言えば多角形などの図形を意味するものとする．D 上の質量密度関数を $f(x,y)$ とする．1 次元で行ったように離散的な場合の，質点としての重心の式より，極限をとることによって

$$\bar{x}=\frac{\iint_D xf(x,y)dxdy}{\iint_D f(x,y)dxdy},\qquad \bar{y}=\frac{\iint_D yf(x,y)dxdy}{\iint_D f(x,y)dxdy}$$

が得られる．

図形の重心では質量密度関数を $f(x,y)=1$ とする．この場合，全質量は図形 D の面積 $area(D)$ になる．すなわち，

$$\iint_D f(x,y)dxdy=area(D)$$

である．すると多角形などの面としての重心は，二重積分を用いなくても，図形を分割することで重心を求めることができる．ただし，元となる直角三角形の面としての重心だけは二重積分で求める必要がある．

補題 1 (直角三角形の面としての重心)

一般性を失うことなく，次のような直角三角形を考えてよい．xy 平面上の 3 点 O$(0,0)$，A$(a,0)$，B(a,b) を頂点とする直角三角形 OAB を考える．ただし，$a>0$, $b>0$ とする．このとき，△OAB の面としての重心は各頂点に質量 1 を乗せた場合の質点としての重心と一致する．

【証明】△OAB の質点としての重心は $(\bar{x},\ \bar{y}) = \left(\dfrac{2a}{3},\ \dfrac{b}{3}\right)$ である．面としての重心 $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ を求める．直角三角形の領域を D とすると，D の面積は $area(D) = \dfrac{ab}{2}$ である．従って，

$$\tilde{x} = \frac{1}{\iint_D dxdy}\iint_D xdxdy = \frac{1}{area(D)}\iint_D xdxdy = \frac{2}{ab}\int_0^a\left\{\int_0^{\frac{b}{a}x} xdy\right\}dx = \frac{2}{ab}\int_0^a \frac{b}{a}x^2dx = \frac{2a}{3}$$

である．同様に

$$\tilde{y} = \frac{1}{area(D)}\iint_D ydxdy = \frac{2}{ab}\int_0^a\left\{\int_0^{\frac{b}{a}x} ydy\right\}dx = \frac{2}{ab}\int_0^a\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2x^2}{a^2}\right\}dx = \frac{b}{3}$$

である．よって，両者は一致する．　□

命題 2 (三角形の面としての重心と質点としての重心は一致する)

一般性を失うことなく次のような三角形を考えてよい．xy 平面上の 3 点 O$(0,0)$，A$(a,0)$，B(b,c) を頂点とする △OAB を考える．ただし，$a>0$, $c>0$, $0\le b\le a$ とする．このとき，△OAB の面としての重心は各頂点に質量 1 を乗せた場合の質点としての重心と一致する．

【証明】△OAB の質点としての重心は $(\bar{x},\ \bar{y}) = \left(\dfrac{a+b}{3},\ \dfrac{c}{3}\right)$ である．面としての重心 $(\tilde{x},\ \tilde{y})$ を求める．頂点 C から OA に下ろした垂線の足を H とする．△OAB の領域を D とし，これを直角三角形 BHO の領域 D_1 と直角三角形 BHA の領域 D_2 に分ける．補題 1 より D_1, D_2 の重心 $(\bar{x}_1,\ \bar{y}_1)$, $(\bar{x}_2,\ \bar{y}_2)$ は質点としての重心と等しいので

$$(\bar{x}_1,\ \bar{y}_1) = \left(\frac{2b}{3},\ \frac{c}{3}\right), \qquad (\bar{x}_2,\ \bar{y}_2) = \left(\frac{a+2b}{3},\ \frac{c}{3}\right)$$

である．またそれぞれの質量は図形の面積であるから $area(D_1) = \dfrac{bc}{2}$, $area(D_2) = \dfrac{(a-b)c}{2}$ である．従って，

$$\tilde{x} = \frac{area(D_1)\cdot\bar{x}_1 + area(D_2)\cdot\bar{x}_2}{area(D_1)+area(D_2)} = \frac{bc/2\cdot 2b/3 + (a-b)c/2\cdot(a+2b)/3}{bc/2+(a-b)c/2}$$

$$= \frac{b^2c/3 + (a-b)(a+2b)c/6}{ac/2} = \frac{2b^2 + (a^2-2b^2+ab)}{3a} = \frac{a+b}{3}$$

$$\tilde{y} = \frac{area(D_1)\cdot\bar{y}_1 + area(D_2)\cdot\bar{y}_2}{area(D_1)+area(D_2)} = \frac{bc/2\cdot c/3 + (a-b)c/2\cdot c/3}{ac/2} = \frac{bc+(a-b)c}{3a} = \frac{c}{3}$$

よって，両者の重心は一致する．　□

2.3　線としての重心

平面上の曲線 $C\ :\ x = x(t),\ \ y = y(t)\quad (a\le t\le b)$ を考える．また，C 上の質量密度関数を $f(x,y)$ とする．このとき，曲線 C の重心 G$(\bar{x},\bar{y})$ は，$(\bar{x},\bar{y}) = \dfrac{\int_C xf(x,y)ds}{\int_C f(x,y)ds}$, $\bar{y} = \dfrac{\int_C yf(x,y)ds}{\int_C f(x,y)ds}$ である．この重心も曲線 C を細かく分けて質点としての重心を求め，極限をとることで導かれる．

次に平面上の線分を考える．その質量密度関数は $f(x,y)=1$ であるとする．この線分の重心は明らかに線分の中点であり，その質量は線分の長さである．これを線積分で示しておこう．

命題 3（線分の重心）

平面上の 2 点 $A(a_1, b_1), B(a_2, b_2)$ を考える．線分 AB の質量密度関数を $f(x,y)=1$ とする．このとき，線分 AB の線としての重心はその中点であり，質量は線分の長さである．

【証明】

線分 AB を次のように表す．$C:\ \ x=a_1+(a_2-a_1)t, \quad y=b_1+(b_2-b_1)t, \quad (0\le t\le 1)$．全質量 M は

$$M=\int_C f(x,y)ds=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}=\text{線分の長さ}$$

である．また，

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\int_C xf(x,y)ds=\int_0^1\{a_1+(a_2-a_1)t\}\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}dt$$
$$=\left[a_1t+\frac{1}{2}(a_2-a_1)t^2\right]_0^1=\frac{a_1+a_2}{2}=\text{中点}$$

である．$\bar{y}$ についても同様である．　□

例題 1 (三角形の場合，質点としての重心と線としての重心は異なる)

平面上の 3 点 $A(-3,0)$，$B(3,0)$，$C(0,4)$ を頂点とする三角形 ABC を考える．△ABC の質点としての重心は $(\bar{x},\bar{y})=\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$ である．線としての重心 $(\tilde{x},\tilde{y})$ は，AC=BC= 5，AB= 6 だから，点 $\left(-\dfrac{3}{2},2\right)$ に質量 5，点 $\left(\dfrac{3}{2},2\right)$ に質量 5，点 $(0,0)$ に質量 6 を乗せた場合の質点としての重心になる．従って，

$$\tilde{x}=\frac{5\cdot(-3/2)+5\cdot 3/2+6\cdot 0}{16}=0, \qquad \tilde{y}=\frac{5\cdot 2+5\cdot 2+6\cdot 0}{16}=\frac{5}{4}$$

である．すなわち，両者の重心は異なる．　□

(注)　一般に三角形の線としての重心は各辺の中点を頂点とする三角形の内心になる (1)．

例題 2（四角形の場合，質点、面，線としての重心は 3 つとも異なる）

平面上の 4 点 $A(0,\ 0), B(2a,\ 0), C(2a,\ a), D(0,\ 2a)$ を頂点とする台形 ABCD を考える．$a>0$ とする．この台形の質点としての重心は $G(\bar{x},\ \bar{y})=\left(a,\ \dfrac{3a}{4}\right)$ である．一方，面としての重心は $F(\hat{x},\ \hat{y})=\left(\dfrac{8a}{9},\ \dfrac{7a}{9}\right)$ であり，線としての重心は $L(\tilde{x},\ \tilde{y})=\left(\dfrac{15+\sqrt{5}}{20}a,\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}a\right)$ である．このように質点と面と線の重心の位置は異なる．　□

一般に四角形以上の多角形においては，この 3 つの重心は異なる．質点，面，線としての重心は参考文献 (1) p.52 に述べられている．

2.4　質点，面，線としての重心の違い

中学校数学科，高等学校数学科での重心は各頂点に質量 1 を乗せた場合の質点としての重心を意味している．ベクトルで三角形 ABC の重心 G と言えば

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$$

と書く．また，n 角形の重心 P も

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}}{n}$$

と書く．これは質点としての重心である．三角形の場合だけ質点としての重心と面としての重心が一致するので，平板の三角形をこの点 G で支えてもつり合う．しかし，多角形の場合は点 P で平板を支えてもつり合わない．

3　数学教育における重心の概念

3.1　内分点と外分点

公式 1 (内分点の公式)
2 点 A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2) に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n}, \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

である．

この公式は覚えにくい．なぜなら，x_1 と n が対応し，x_2 と m が対応していて，対応関係が逆になっているからである．このようなときは，重心を考えると覚えやすくなる．線分 AB を $m:n$ に内分するから，点 A に質量 n を置き，点 B に質量 m を置くと釣り合う．このような質点の重心を求める問題になる．このとき，重心は，

$$\bar{x} = \frac{nx_1+mx_2}{n+m}$$

である．重心で考えると質量と場所の対応が自然で理解しやすい．また，m と n が逆になる理由も分かる．

公式 2 (外分点の公式)
2 点 A(x_1, y_1)，B(x_2, y_2) に対して，線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

である．

外分点の公式は，さらに分かりにくい．この公式を覚えるには，やはり重心を考えるとよい．線分 AB の外分点は，線分 AB の外にある．重心が線分 AB の外にあるためには，質量の一方が正で，もう一方が負の場合である．すなわち，点 x_1 に質量 $-n$ があり，x_2 に質量 m がある場合を考える．この場合，重心は

$$\bar{x} = \frac{-nx_1+mx_2}{-n+m}$$

となり，外分点の公式になる．負の質量は分かりにくいけれども，例えば，浮力のようなものを考えるとよい．

注) ただし，$m=n$ の場合だけ，重心は存在しない．このときは釣り合わず回転する．このような力を偶力という．

3.2　確率統計学との関係

データ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の度数が $m_1, m_2, \cdots, m_n$ であるとき，このデータの平均は，

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

である．これを重み付き平均という．この式も重心の公式と同じものである．つまり，平均は重心と考えることができる．

例題 3 (平均と重心は同じ)
紙でヒストグラム (度数分布図) をつくり，切りぬく．平均点のところに穴をあけ，棒を差し込む．手を離して半回転させると紙は平均点のところで釣り合う．つまり，平均が重心になっていることがわかる．このことは連続量の場合にも成立する．

次に，離散的な場合の確率変数を考える．

データ $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に確率 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ が対応している確率変数 X の期待値は,

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$$

である．$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ だからこれも重心の公式と同じである．期待値も重心と考えることができる．

連続的な確率変数でも同様である．
$f(x)$ を確率変数 X の確率密度関数としたとき，X の期待値 $E(X)$ は

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

である．これは質量密度関数 $f(x)$ が与えられた重心の公式と同じである．$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ だから，重心と一致している．つまり，期待値も重心と考えることができる．

3.3　濃度との関係

例題 4 (食塩水の濃度)
x_1 %の食塩水 m_1 g と，x_2 %の食塩水 m_2 g をまぜると，何%の食塩水ができるか．
答えは

$$\bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} \quad (\%)$$

である．これは重心の公式と同じである．すなわち，x_1, x_2 %という数直線上の数値 (場所) に食塩水の重さ (質量) が乗っている状態が想定できる．食塩水を混ぜると平均化されて重心になる．

3.4　ベクトルの問題

△ABC の 3 頂点 A，B，C にそれぞれ，質量 m, n, ℓ を乗せたときの，△ABC の重心を P とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \ell\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{m + n + \ell}$$

である．ただし，O は原点である．特にベクトルの問題では，$m\overrightarrow{\mathrm{PA}} + n\overrightarrow{\mathrm{PB}} + \ell\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{0}$ であるような点 P を考えることが多い．この場合，P=O であり，△ABC の重心 P は原点 O にある．$m > 0$, $n > 0$, $\ell > 0$ の場合，重心 P は三角形の内部にあり，$m < 0$, $n > 0$, $\ell > 0$ などの場合，重心 P は三角形の外部にある．重心を使えば次のような問題を簡単に解くことができる．

【問題 1】平面上に三角形 ABC と点 P があり，$3\overrightarrow{\mathrm{PA}} + 4\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 5\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{0}$ を満たしている．2 直線 AP，BC の交点を Q とする．線分の長さの比 AP : PQ を求めよ．
【解答】点 P は三角形の頂点 A，B，C にそれぞれ質量 3，4，5 を乗せたときの重心になっている．点 B，C を合成すれば，点 Q に質量 $4 + 5 = 9$ の質点があることになる．点 Q，A を合成すれば AP : PQ= 9 ： 3 = 3 ： 1 ⋯ (答え)

【問題 2】平面上に △ABC と点 P があり，$4\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{BP}} + 3\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \overrightarrow{0}$ を満たしている．2 直線 AP，BC の交点を Q とするとき，点 Q は線分 AP を _ ： _ に外分する．
【解答】点 P は三角形の頂点 A，B，C にそれぞれ質量 4，−1，3 を乗せたときの重心である．重心 P は三角形 ABC の外部にある．点 B，C を合成すれば，点 Q に質量 $-1 + 3 = 2$ の質点があることになる (点 Q は線分 CB を 1 ： 3 に外分)．点 A，Q を合成すれば，点 P は線分 AQ を 1 ： 2 に内分する点であることがわかる．従って，点 Q は線分 AP を <u>3</u> ： <u>2</u> に外分する．　⋯ (答え)

また，次のようなベクトル方程式にも重心の考え方は適用できる．空間内に 1 直線上にない 3 点 A，B，C があった場合，3 点を通る平面のベクトル方程式は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \qquad s + t + u = 1$$

である．3 点 A，B，C が xy 平面上にあった場合にもこれは成立する．すなわち，xy 平面上の任意の点 P は上記の形に表すことができる．これは点 A，B，C に質量 s, t, u を乗せたときの重心が点 P であることを示している．ただし，$s+t=0$, $u=1$ などの場合は重心の意味をなさない．なぜなら，質点 A と質点 B の重心は偶力となって計算できないからである．しかし，質点 B と質点 C の合成の後，質点 A と合成すれば重心を求めることができる．加法の結合法則は成立しないけれども重心の位置があると考えた方が便利である．s, t, u を三角形 ABC の重心座標という [(2)]．

3.5　チェバの定理

定理 1 (チェバの定理)
△ABC の辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 P, Q, R があり，3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交われば

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1 \tag{3.1}$$

である．また，逆も成立する．

三角形の 3 つの頂点 A，B，C に正の質量 a, b, c を乗せると

$$\mathrm{AR} : \mathrm{RB} = b : a, \qquad \mathrm{BP} : \mathrm{PC} = c : b, \qquad \mathrm{CQ} : \mathrm{QA} = a : c$$

であるから

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

であることがすぐわかる．ただし，P, Q, R は △ABC の辺 BC, CA, AB 上の点であり，それぞれ，質点 B，C を合成した点，質点 C，A を合成した点，質点 A，B を合成した点である．また，これらの直線は三角形の重心で交わる．

三角形の外部で交わる場合もある．それを考えるためにチェバの定理とメネラウスの定理を整理しておく．

△ABC の辺 BC, CA, AB 上にそれぞれ点 P, Q, R があり，P, Q, R は三角形の頂点ではないとする．すると点 P, Q, R は線分 BC, CA, AB の内部にあるか (○) 外部にあるか (×) のいずれかである．従って，8 通りの場合が考えられるが，本質的には ○○○，○××，○○×，××× の 4 通りになる．○○○, ○×× の場合，3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交わることはあっても 3 点 P, Q, R が一直線上になることはない．○○×，××× の場合，3 点 P, Q, R が一直線上になることはあっても 3 直線 AP，BQ，CR が 1 点で交わることはない．○○○，○×× の場合がチェバの定理で，○○×，××× の場合がメネラウスの定理である．一直線上にある条件はチェバの定理と同様である．

○×× の場合を考える．a, b, c を正の数として，3 つの頂点 A，B，C に質量 $-a$, b, $-c$ を乗せる．このとき，

$$\mathrm{AR} : \mathrm{RB} = b : (-a), \qquad \mathrm{BP} : \mathrm{PC} = (-c) : b, \qquad \mathrm{CQ} : \mathrm{QA} = (-a) : (-c)$$

であるから

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = \frac{(-c)}{b} \cdot \frac{(-a)}{(-c)} \cdot \frac{b}{(-a)} = 1$$

が成立する．ただし，P, Q, R は △ABC の辺 BC, CA, AB 上の点であり，それぞれ，質点 B，C を合成した点，質点 C，A を合成した点，質点 A，B を合成した点である．また，これらの直線は三角形の重心で交わる．辺の比にマイナスをつけると外分点と内分点がすぐわかる．しかも，質量をそのまま乗せた形になっている．R は外分点であるから AR と RB の向きが逆であると解釈してもよい．

次に ○○×，××× の場合を考える．××× は 3 つに負の質量を乗せたということではない．3 つが負の質量なら重心は三角形の内部にある．××× は 3 点が外分点ということである．従って，a, b, c のどの 2 つも異符号である．そのような a, b, c は存在しない．従って，重心はつくれない．つまり，1 点で交わることはない．○○× も同様である．ゆえにメネラウスの定理に重心の概念を適用するのには無理がある．

メネラウスの定理では，質量を乗せる点を A，B，C ではなく，他の点に変更すれば重心の概念を適用することもできる．○○× の場合を考える．点 R，Q は内分点で，点 P は外分点であるとする．3 点 A, B, P に正の質量 a, b, c を乗せる．質点 B，P を合成した点を C，質点 P，A を合成した点を Q′，質点 A，B を合成した点を R とする．また，△ABP の重心を Q とする．このとき，P，Q，R は一直線上にあり，

$$\mathrm{AR} : \mathrm{RB} = b : a, \qquad \mathrm{BP} : \mathrm{PC} = b+c : b, \qquad \mathrm{CQ} : \mathrm{QA} = a : b+c$$

であるから

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = \frac{b+c}{b} \cdot \frac{a}{b+c} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

が成立する．これはメネラウスの定理である．

【問題 3】△ABC の辺 BC, CA, AB の内部にそれぞれ点 P, Q, R があり，3 直線 AP，BQ，CR が 1 点 G で交わっているとする．AR : RB = 3 : 1, BP : PC = 1 : 2 であるとき，CQ : QA を求めよ．また，AG : GP を求めよ．

【解答】点 A，B に質量 1，3 を乗せると R の条件は満たされる．点 B，C に質量 2，1 を乗せると P の条件は満たされる．点 B での質量を $3 \times 2 = 6$ に揃える．つまり，点 A，B，C に質量 2，6，3 を乗せると題意はみたされる．従って，CQ : QA = 2 : 3. 点 A，P に質量 2，9 があるので，AG : GP = 9 : 2.　…　(答え)

※チェバの定理やメネラウスの定理を知らなくても重心の概念で解ける．

4　最後に

広辞苑で「釣り合う」を引くと (1) 双方が平均する，もちあう (2) 相応する，ふさわしい状態になる，見合う，とある．体操で「平均台」というのもある．釣り合うことには平均という意味が含まれている．重心という一つの数式を通してみると，重心，釣り合う，平均，混ぜる が同じものであることがわかる．

参考文献

(1) バルク，重心の概念の幾何への応用（上，下），商工出版社，1960.
(2) 一松信，いろいろな幾何 I，岩波講座・応用数学，岩波書店，1993.