

〔論 文〕

2 個の等長傾斜き裂の解析

(第 2 報: 面内せん断を受ける無限板)

井川 秀信*¹

Analysis of Two Equally Inclined Cracks (Part II: Infinite Plate Subjected to In-plane Shear)

Hidenobu IGAWA*¹

Abstract

In a material, fatigue fractures are caused by the growth and incorporation of cracks generated from latent defects and dislocations, which can lead to accidents. In the initial stage of fatigue fracture, micro-cracks are generated from slips in the material due to shear stress. Following a cycle of growth and incorporation, these micro-cracks eventually form macro cracks, which leads to final fracture. The effect of crack interference needs to be investigated to elucidate the growth mechanism of fatigue fractures.

In the present paper, two equally inclined cracks in an infinite plate are considered. For the analysis, the Body Force Method is used under traction-free conditions for the crack edges; the accuracy is greatly improved by using the body force densities and resultant force boundary conditions. Numerical calculations were performed for various arrays of cracks under in-plane shear.

Key Words : Cracks, Stress intensity factor, In-plane shear, Body force method

1. 緒 言

疲労による事故は、材料内に潜在する欠陥や転位などから発生したき裂の成長・合体に起因している。疲労破壊の初期段階では、せん断応力により材料内に生じたすべりから微小なき裂が発生する。その後、それらが成長・合体を繰り返しながらマクロき裂を形成し、やがて最終破壊に至ることになる。従って、疲労破壊におけるき裂成長のメカニズムを解明するためにはき裂干渉の影響を調べる必要がある。

最終破壊に至るまでの疲労寿命の予測には、き裂先端の応力場を示すパラメータである応力拡大係数が重要な役割を持ち、それを高精度に求めるための応力解析法の研究やコンピュータによるシミュレーションが数多く行われている。

石田らは、これまで Laurent 展開法による応力解析法を開発し、複数個のき裂に対する応力拡大係数の結果を与えた^{(1)~(3)}。しかし Laurent 展開法では 2 個以上のき裂が互いに接近すると急激に計算精度が低下する欠点がある。そこで、この問題を解決するために体積力法による応力解析法の研究を進めている^{(4)~(6)}。

前報⁽⁶⁾では、引張応力を受ける無限板に 2 個の等長傾斜き裂がある場合について高精度な応力解析法を提案した。さらに幾つかの典型的な配置をした 2 個の等長傾斜き裂について解析を行い、き裂の干渉が応力拡大係数に与える影響を明らかにした。

本研究は、前報に続き面内せん断を受ける無限板に 2 個の等長傾斜き裂がある場合について、新たな応力解析法を提案すると共にき裂の干渉が応力拡大係数に与える影響を調べたものである。

解析では、2 個の等長傾斜き裂が任意に分布する場合について汎用的で高精度な応力解析法を提案する。応力解析の精度を高めるために、き裂相当面に体積力対を分布させてき裂縁を自由とする方法および合力に基づく境界分割法を用いて体積力の重み定める。また本法を用いていくつもの典型的な配置をした 2 個の等長傾斜き裂についてき裂の大きさおよび傾斜角度を系統的に変えて解析を行い、応力拡大係数の解析結果からき裂干渉が応力拡大係数に与える影響につ

*¹ 交通機械工学科
令和 2 年 10 月 28 日 受理

いて検討する.

2. 解析方法

二次元弾性問題における応力, 合力の成分は, 複素応力関数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ とそれらの微係数によって次のように与えられる.

$$\sigma_y + \sigma_x = 4\text{Re}[\varphi(z)] \quad (1)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \quad (2)$$

$$P_y + iP_x = -\bar{\varphi}(\bar{z}) - z\varphi'(\bar{z}) - \psi'(z) \quad (3)$$

まず, Fig. 1 に示した無限板に角度 β の傾斜をもつき裂を考える. 原点 O に対するき裂中央の位置を ζ とし, き裂長さを $2a$ とする. またき裂面に沿った法線方向 n と接線方向 s を図のように定める.

本研究の解析には, Fig. 2 (a), (b) に示すような, 無限板内の任意の点 z に作用する2種類の集中力対が基礎となる. これらに対する複素応力関数は次式(4), (5)で与えられる. 但し, ここで取扱うような, 境界条件が自平衡な荷重だけで与えられ, かつ応力状態だけを対象とする問題では, 結果はポアソン比 ν に関係しないので, 便宜上, ν を 0 とした.

引張り型集中力対 R :

$$\varphi_1(z) = -\frac{R}{8\pi} \frac{e^{2i\beta}}{1-\zeta}$$

$$\psi_1'(z) = -\frac{R}{8\pi} \left[\frac{2}{z-\zeta} + \frac{\bar{\zeta}e^{2i\beta}}{(1-\zeta)^2} \right] \quad (4)$$

せん断型集中力対 Q :

$$\varphi_2(z) = \frac{iQ}{8\pi} \frac{e^{2i\beta}}{1-\zeta}$$

$$\psi_2'(z) = -\frac{iQ}{8\pi} \frac{\bar{\zeta}e^{2i\beta}}{(1-\zeta)^2} \quad (5)$$

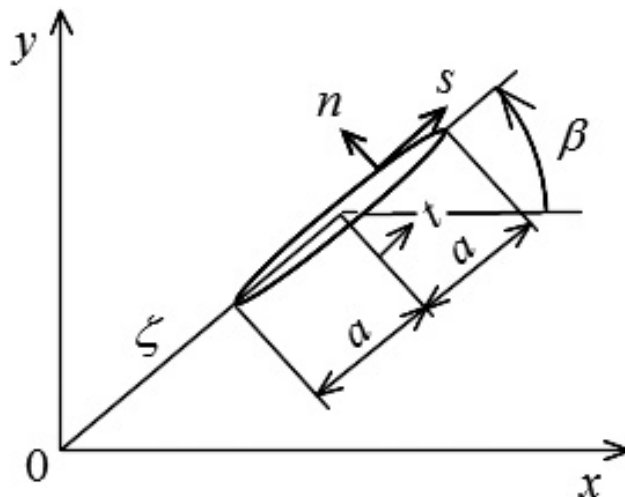


Fig. 1 Inclined crack.

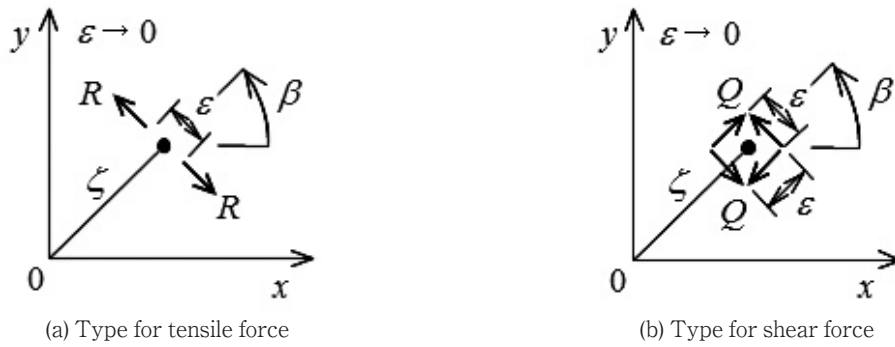


Fig. 2 Body force densities.

従って, P, Q が同時に作用する場合の関数は,

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_1(z) + \varphi_2(z), \\ \psi'(z) &= \psi_1'(z) + \psi_2'(z) \end{aligned} \quad (6)$$

となり, き裂面に沿った法線方向 n と接線方向 s の合力は次式から求められる.

$$\begin{aligned} P_n + iP_s &= (P_x + iP_y)e^{i\beta} \\ &= [-\bar{\varphi}(\bar{z}) - \bar{z}\varphi'(z) - \psi'(z)]e^{i\beta} \end{aligned} \quad (7)$$

き裂面を自由縁とするために引張り型の体積力対 $R=p(t)dt$ とせん断型の体積力対 $Q=q(t)dt$ をき裂相当面に分布させる. ここに $p(t), q(t)$ はき裂面に分布させる体積力の密度であり, t は Fig. 1 に示したき裂中央からの距離である.

各き裂の座標系と幾何学パラメータを Fig. 3 の様にとり, 各き裂縁に体積力対を分布させるためにき裂先端局部応力場の特性に適合する次の関係式を用いる.

$$\begin{aligned} p(t) &= 4\sqrt{a_i^2 - t^2}f_i(t), \\ q(t) &= 4\sqrt{a_i^2 - t^2}g_i(t) \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)の重み関数 $f_i(t), g_i(t)$ は, Fig. 4 に示した折れ線関数による合力境界分割法で求めた.

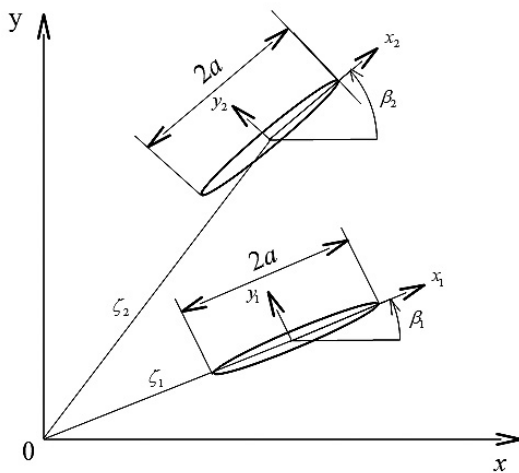


Fig. 3 Equal inclined cracks in wide plate

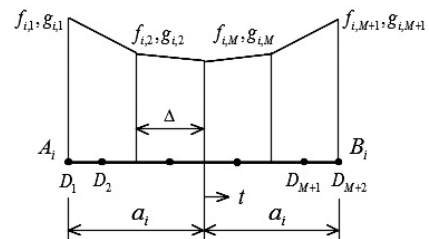


Fig. 4 Distribution of body force densities

各き裂長さ a をとるとき, き裂端 A_i, B_i ($i=1, 2$) の応力拡大係数は次式で求められる.

$$\begin{aligned} K_{I,A_i}, K_{I,B_i} &= [f_i(t)]_{t=\pm a} \sqrt{\pi a}, \\ K_{II,A_i}, K_{II,B_i} &= [g_i(t)]_{t=\pm a} \sqrt{\pi a} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (9)$$

3. 解析結果

3.1 無次元応力拡大係数

本研究では, 次式で定義されたモード I, モード II の無次元応力拡大係数を求めた.

無次元応力拡大係数

$$\begin{aligned} F_{I,A_i} &= \frac{K_{I,A_i}}{\tau \sqrt{\pi a}}, \quad F_{I,B_i} = \frac{K_{I,B_i}}{\tau \sqrt{\pi a}}, \\ F_{II,A_i} &= \frac{K_{II,A_i}}{\tau \sqrt{\pi a}}, \quad F_{II,B_i} = \frac{K_{II,B_i}}{\tau \sqrt{\pi a}} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (10)$$

面内せん断を受ける無限板に一個の傾斜き裂をもつ場合の無次元応力拡大係数は, 次式で与えられる⁽⁷⁾.

$$F_I = 2 \cos \theta \sin \theta,$$

$$F_{II} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (11)$$

なお, θ はき裂の傾斜角度である.

3.2 計算精度の検討

本研究では, き裂長さ $2a$, き裂中心間隔を $2d$ から求められるパラメータを次式で与える.

$$\lambda = \frac{a}{d} \quad (12)$$

Table 1 は, Fig. 5 (a), (b) に示した 2 個のき裂が一行に配置した場合 (Problem A) および平行に配置した場合 (Problem B) の無次元応力拡大係数 F_{II,B_1} を示したものである. なお, Laurent 展開法による解析結果⁽³⁾ に合わせて Problem A では有効数字 5 桁までの解析値, Problem B では有効数字 4 桁までの解析値を示している. 本法は, 表中に示した Laurent 展開法による結果と $\lambda=0.8$ までほぼ一致を示している. また本法では λ が 0.8 を超えても計算可能であり, 2 個の一行き裂の端が互いに接触する手前 $\lambda=0.9$ 付近まで精度よく解析できる.

Fig. 6 は, 縦軸にモード II の無次元応力拡大係数 F_{II} を, 横軸に λ をとったときの Problem A と Problem B の解析結果を示したものである. なお Problem A では, F_{II,B_1} を黒の実線で, F_{II,A_1} を破線で示している. Problem B では, F_{II,B_1} ($=F_{II,A_1}$) を青色の実線で示している.

同図から Problem A では, き裂端 A_1 と B_1 を比較すると $F_{II,A_1} < F_{II,B_1}$ であり, λ の増大, すなわち 2 個のき裂の接近で内側のき裂端 B_1 の無次元応力拡大係数 F_{II,B_1} の変化が特に大きくなる. Problem B では, Problem A に比べると λ に対

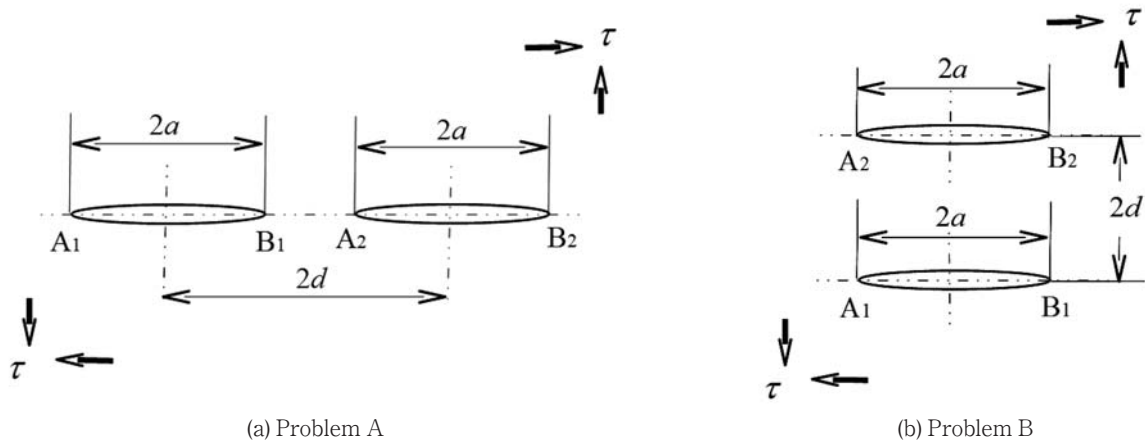


Fig. 5 Two cracks subjected to in-plane shear

Table 1 The values of F_{II,B_1} for Problem A and B.

Problem A (F_{II,B_1})			Problem B (F_{II,B_1})		
a/b	Laurent's Method	The Present Method	a/b	Laurent's Method	The Present Method
0.0	1.0000	1.0000	0.0	1.000	1.000
0.2	1.0057	1.0057	0.2	1.005	1.005
0.4	1.0272	1.0272	0.4	1.016	1.016
0.6	1.0804	1.0804	0.6	1.027	1.027
0.8	1.2289	1.2286	0.8	1.033	1.034
0.9	-	1.4520	0.9	-	1.035

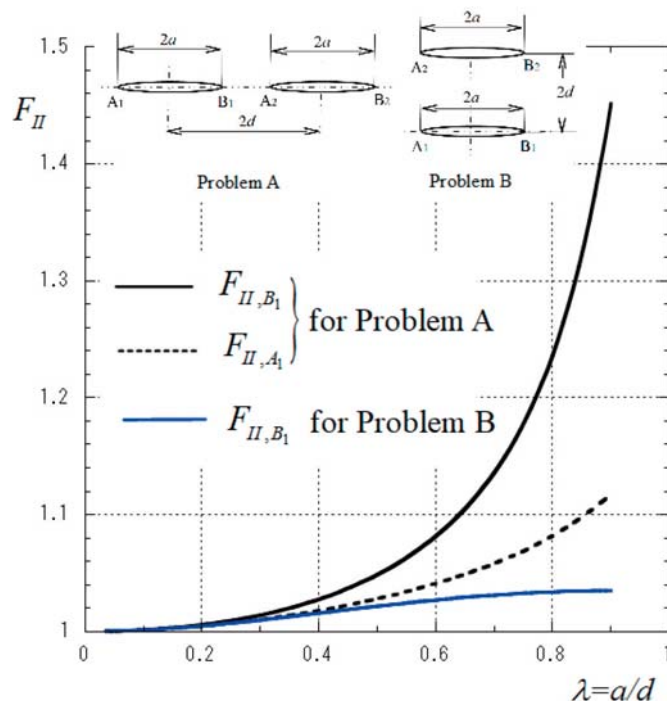


Fig. 6 F_{II} , λ -relations for Problem A and B

する F_{II,B_1} ($=F_{II,A_1}$) の変化は小さい。

以上のことから、本研究ではき裂の相互干渉に着目しており、2 個のき裂の内側に近接するき裂端の無次元応力拡大係数を重点的に調べる。

3. 3 解析結果と応力干渉効果

(1) 平行傾斜き裂の干渉 (Case(1))

Fig. 7 は、図に示すようにき裂の中心を軸にして 2 個同時に時計回りに回転させた場合の平行傾斜き裂を示している。なお、図中に示すようにき裂長さを $2a$ 、2 個のき裂中心間隔を $2d$ 、き裂の傾斜角を θ とする。

Fig. 8 は、縦軸にモード II の無次元応力拡大係数 F_{II} を、横軸に λ をとり、傾斜角 θ が $0 \sim 90^\circ$ の範囲について各 θ に対する F_{II,B_1} 、 F_{II,A_1} を示したものである。図中の実線がき裂端 B_1 の F_{II,B_1} ($=F_{II,A_2}$) であり、破線がき裂端 A_1 の F_{II,A_1} ($=F_{II,B_2}$) である。き裂端 A_1 、 B_1 の無次元応力拡大係数の大小関係は、 θ が 0° のとき $F_{II,B_1} > F_{II,A_1}$ であるが、 θ が 15° より大きくなると $F_{II,B_1} < F_{II,A_1}$ である。き裂の傾斜角では θ が 0° で各き裂端の F_{II} が最大となり、 θ が大きくなると各 θ に対する F_{II} の無次元応力拡大係数が低下する。また、 λ の増大、すなわちき裂端の接近に伴いき裂干渉の影響が大きくなる

が、応力拡大係数に与える影響は、 θ により各き裂端の F_I を増大させたり減少させたりする。

Fig. 9は、各 θ に対するモードIの無次元応力拡大係数 F_I と λ の関係を示したものである。図中の実線がき裂端 B_1 の $F_{I,B_1}(=F_{I,A_2})$ であり、破線がき裂端 A_1 の $F_{I,A_1}(=F_{I,B_2})$ である。この場合、 $\theta=45^\circ$ で F_I が最大となり、これより θ が大きくなると小さくても F_I の曲線群が低下する。

Fig. 10は、縦軸にモードIおよびモードIIの無次元応力拡大係数 F 、横軸にき裂の傾斜角 θ をとり、 λ が0, 0.5, 0.9の F_{II,B_1} , F_{I,B_1} をそれぞれ実線と破線で示したものである。なお、 $\lambda=0$ の無次元応力拡大係数は、式(11)で与えられ、図中に赤色の実線と破線で示している。この場合、2き裂の内側に近接するき裂端のき裂干渉に着目する。 θ に対するき裂干渉の影響は、モードIIで $0^\circ\sim 10^\circ$ の範囲で大きく現れるが、それ以外の θ では、式(11)で与えられる $\lambda=0$ の無次元応力拡大係数にほぼ近い値となっている。そして、無次元応力拡大係数が最大値となるき裂の傾斜角 θ は、モードIで 45° 、モードIIで 0° である。

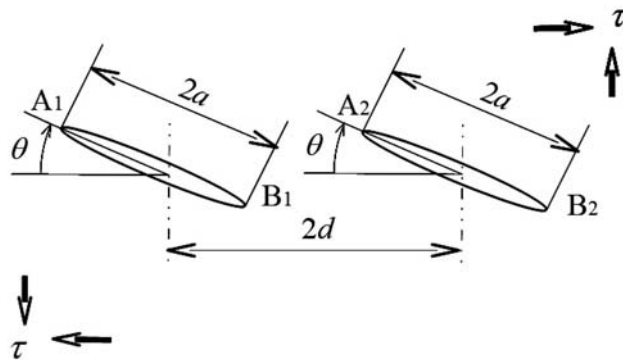


Fig. 7 Parallel inclined cracks as Case (1)

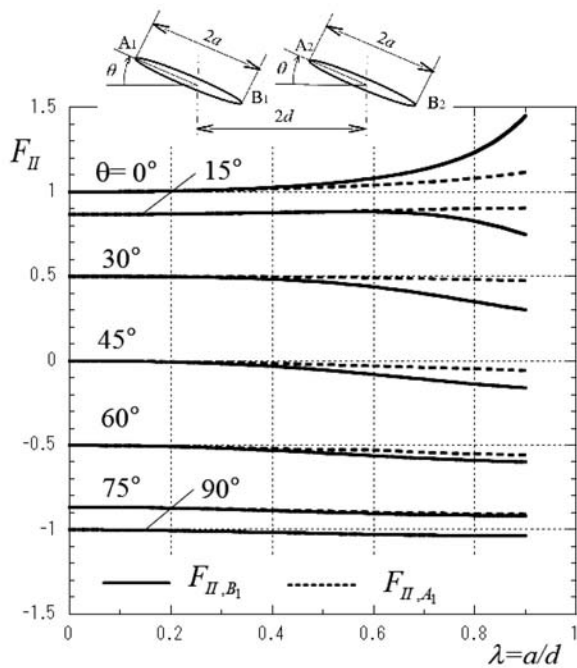


Fig. 8 F_{II}, λ - relations for Case (1)

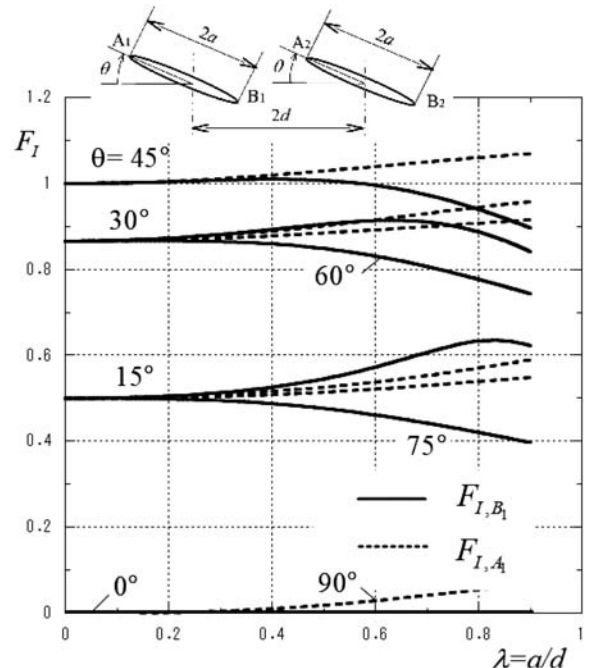


Fig. 9 F_I, λ - relations for Case (1)

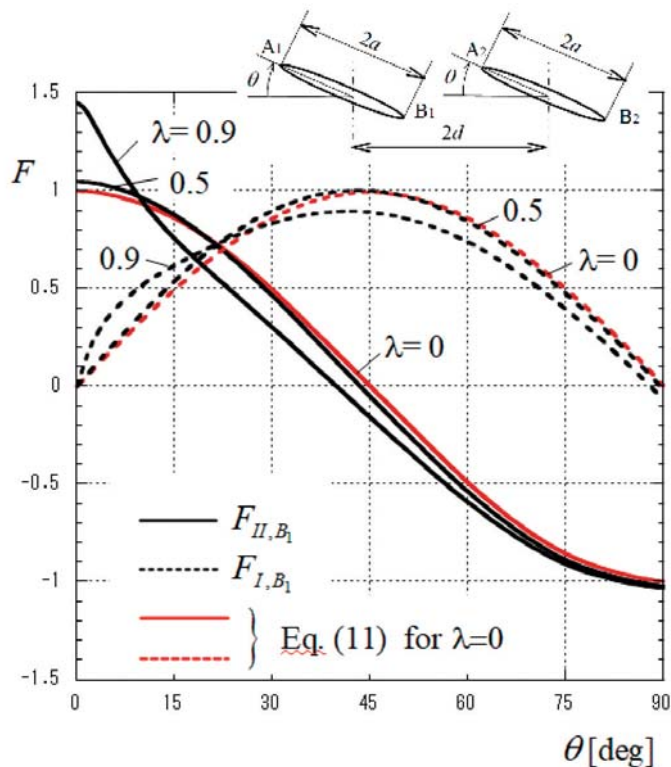


Fig. 10 F, θ - relations for Case (1)

(2) 傾斜き裂と水平き裂の干渉 (Case (2))

Fig. 11は、図に示すように2個の一系列き裂 ($\theta = 0^\circ$) の一方をき裂の中心を軸にして時計周りに回転させた場合の傾斜き裂と水平き裂を示している。

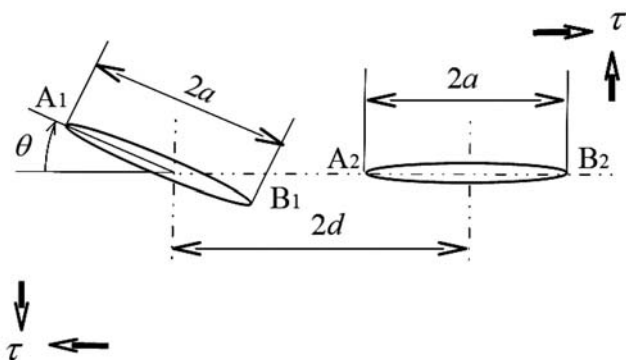


Fig. 11 An inclined crack and a horizontal crack as Case (2)

Fig. 12は、モードIIのき裂端 B_1 の無次元応力拡大係数 F_{II, B_1} と λ の関係を示したものである。 F_{II, B_1} は $\theta = 0^\circ$ で最大となり、 θ がこれより大きくなると各 θ に対する F_{II, B_1} の無次元応力拡大係数が低下する。 また、 F_{II, B_1} は、 $\theta = 0^\circ$ ではき裂端 B_1 と A_2 の間隔が近接しているため λ の増大でき裂干渉の影響が大きくなるが、 θ がこれより大きくなると各き裂端の距離も大きくなりき裂干渉の影響をあまり受けない。

Fig. 13は、き裂端 A_2 の F_{II, A_2} と λ の関係を示したものである。 この場合、 F_{II, A_2} は、 λ の増大で各き裂の傾斜角度 θ により増大の様子が異なる。 特に θ が 30° を超えるとき裂端 A_2 は、き裂端 B_1 よりき裂自由縁の影響を大きく受け、 $\lambda > 0.7$ で各 θ に対する F_{II, A_2} の変動が大きくなる。

Fig. 14は、各 θ に対するモードIの無次元応力拡大係数 F_I と λ の関係を示したものである。 図中の実線がき裂端 B_1 の F_{I, B_1} あり、破線がき裂端 A_2 の F_{I, A_2} である。 なお、 F_{I, A_2} についてはき裂干渉の影響が小さいため $\theta = 0 \sim 45^\circ$ の結果を

示す. 同図からき裂端 B_1 では $\theta=45^\circ$ で F_{I,B_1} が最大となり, これより θ が大きくても小さくても F_{I,B_1} の曲線群が低下する. また, き裂干渉の影響は $\lambda > 0.6$ で F_{I,B_1} , F_{I,A_2} の変動が大きくなり, それらの様子は θ により増大・減少の傾向が異なる.

Fig. 15 は, 縦軸に無次元応力拡大係数 F , 横軸にき裂の傾斜角 θ をとり, λ が 0, 0.5, 0.9 に対する F_{II,A_2} , F_{II,B_1} および F_{I,B_1} を示したものである. 図中の青色実線が F_{II,A_2} , 黒色実線が F_{II,B_1} , 黒色破線が F_{I,B_1} である. なお,

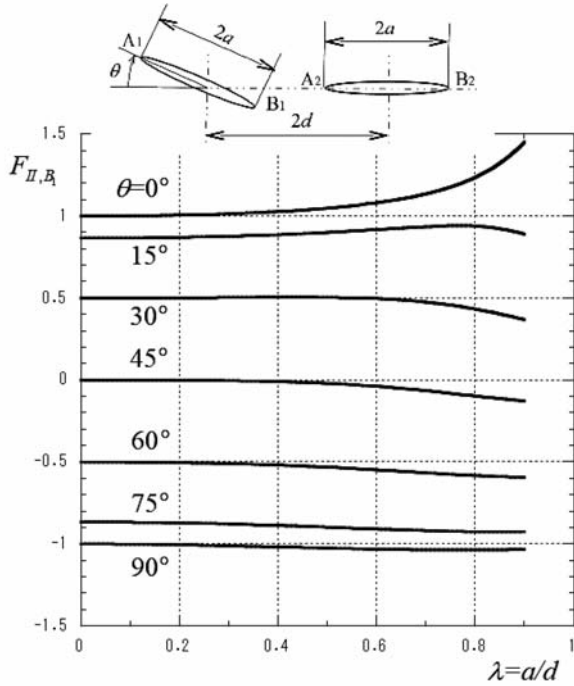


Fig. 12 F_{II,B_1} , λ - relations for Case (2)

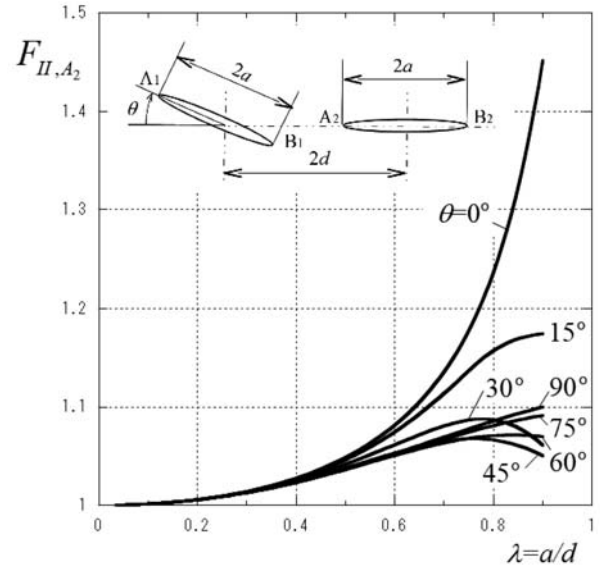


Fig. 13 F_{II,A_2} , λ - relations for Case (2)

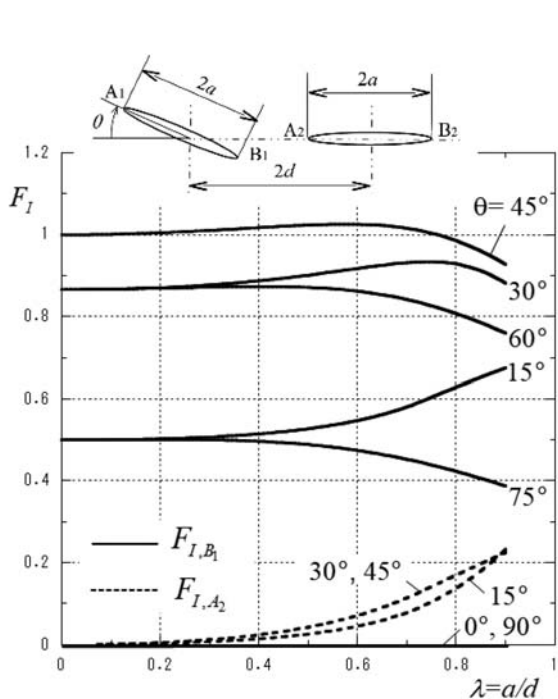


Fig. 14 F_I , λ - relations for Case (2)

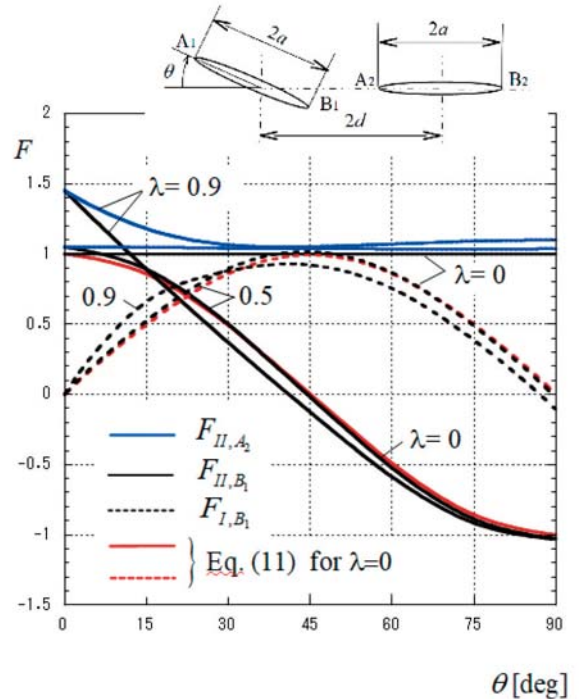


Fig. 15 F , θ - relations for Case (2)

$\lambda = 0$ の無次元応力拡大係数は式(11)で与えられ、赤色の線で示している. 同図より Case (2)のき裂の配置では、き裂干渉の影響は θ が $0^\circ \sim 30^\circ$ の範囲に限定されており、それ以外の θ ではその影響はほとんど見られない.

(3) 傾斜き裂と水平き裂の干渉 (Case(3))

前節の Case (2)では、き裂端の干渉より相対するき裂自由縁の影響が無次元応力拡大係数に変動を与えた. そこで本節では近接するき裂端の干渉を調べるため、次のき裂配置について解析と検討を行う.

Fig. 16は、図に示すように 2 個の一直列き裂 ($\theta = 0^\circ$) の一方をき裂間の中央を軸にして時計周りに回転させた場合の傾斜き裂と水平き裂を示している.

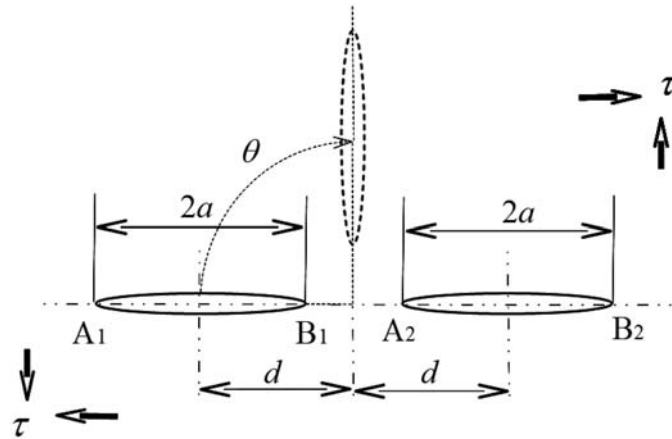


Fig. 16 An inclined crack and a horizontal crack as Case (3)

Fig. 17は、モード II のき裂端 B_1 の無次元応力拡大係数 F_{II,B_1} と λ の関係を示したものである. F_{II,B_1} は $\theta = 0^\circ$ で最大となり、 θ がこれより大きくなると各 θ に対する F_{II,B_1} の無次元応力拡大係数が低下する. これは、き裂の傾斜角が大きくなると応力拡大係数が減少し、き裂の成長速度の低下が推察される. また F_{II,B_1} は、Case (2)に比べき裂端 B_1 と A_2 の間

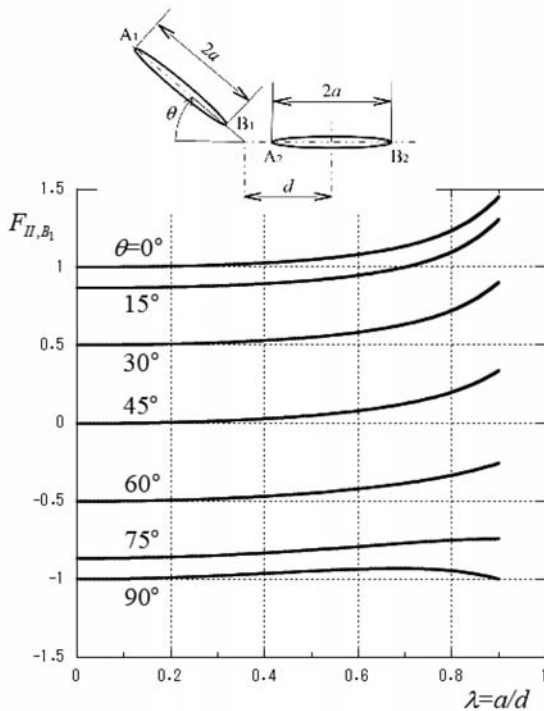


Fig. 17 F_{II,B_1} , λ - relations for Case (3)

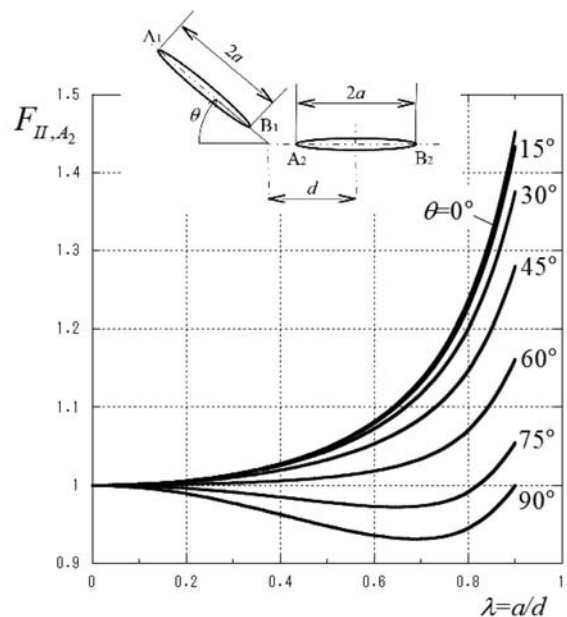
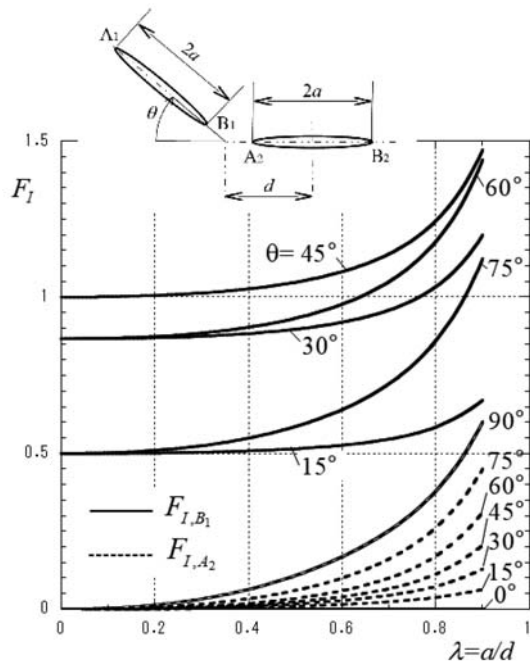
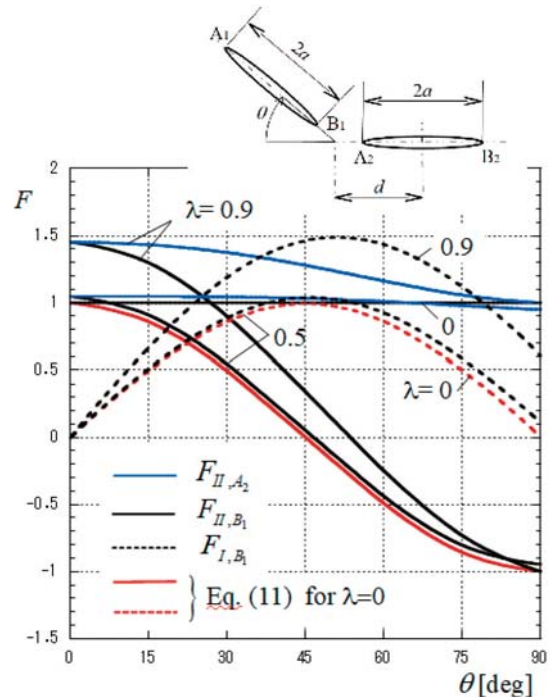


Fig. 18 F_{II,A_2} , λ - relations for Case (3)

Fig. 19 F_I, I - relations for Case (3)Fig. 20 F, θ - relations for Case (3)

隔が近接しているため λ の増大でき裂干渉の影響により無次元応力拡大係数が増大する。

Fig. 18は、き裂端 A_2 の F_{II, A_1} と λ の関係を示したものである。この場合、 F_{II, A_1} は Case (2) と異なる傾向を示しており、 λ の全範囲で θ が 0° で最大、 90° で最小となる。また、 F_{II, A_2} の値は $\theta < 75^\circ$ では λ の増大で大きくなるが、 $\theta > 75^\circ$ では λ の増大で最初減少し、 λ が 0.7 を超えると逆に増大する。

Fig. 19は、各 θ に対するモード I の無次元応力拡大係数 F_I と λ の関係を示したものである。図中の実線がき裂端 B_1 の F_{I, B_1} あり、破線がき裂端 A_2 の F_{I, A_2} である。同図からき裂端 B_1 では $\theta = 45^\circ$ で F_{I, B_1} が最大となり、これより θ が大きくなると小さくても F_{I, B_1} の曲線が低下する。また、き裂端 A_2 では $\theta = 90^\circ$ で F_{I, A_2} が最大となり、この角度では $F_{I, B_1} = F_{I, A_2}$ である。き裂干渉の影響は λ の増大で F_{I, B_1} 、 F_{I, A_2} の値を増大させ、それらの傾向は θ により異なる。

Fig. 20は、縦軸に無次元応力拡大係数 F 、横軸にき裂の傾斜角 θ をとり、 λ が 0、0.5、0.9 に対する F_{II, B_1} 、 F_{II, A_2} および F_{I, B_1} を示したものである。図中の青色実線が F_{II, A_2} 、黒色実線が F_{II, B_1} 、黒色破線が F_{I, B_1} である。なお、 $\lambda = 0$ の無次元応力拡大係数は式(11)で与えられ、赤色の実線および破線で示している。同図よりき裂干渉の影響は θ の全範囲で見られ、き裂長さ λ が増大すると無次元応力拡大係数も大きくなる。

4. 結 論

- (1) 面内せん断を受ける無限板に2個の等長き裂が任意の位置・角度で分布する場合について体積力法による高精度応力解析法を開発した。
- (2) 本法を用いて2個の傾斜き裂による干渉効果を調べるため、Case (1)~Case (3)のモデルについて解析を行い、各き裂端のモード I およびモード II の無次元応力拡大係数の結果を与えた。これらの資料を基にき裂干渉が応力拡大係数に与える影響を明らかにした。
- (3) Case (1)の平行傾斜き裂の場合では、隣接するき裂端の接近に伴いき裂干渉の影響が大きくなり、き裂の傾斜角度 θ により各き裂端の応力拡大係数を増大させたり減少させたりする。
- (4) Case (2)の傾斜き裂と水平き裂の場合では、き裂干渉による無次元応力拡大係数に与える影響は θ が $0^\circ \sim 30^\circ$ の範囲に限定されており、それ以外の θ ではその影響はほとんど見られない。
- (5) Case (3)の傾斜き裂と水平き裂の場合では、き裂干渉による無次元応力拡大係数に与える影響は θ の全範囲で見られ、隣接するき裂端の接近に伴い無次元応力拡大係数も大きくなる。

参考文献

- (1) 石田誠・井川秀信, 久留米工業大学研究報告, No. 15 (1991), pp. 11-28.
- (2) 石田誠・井川秀信, 日本機械学会論文集, 58A-553 (1992), pp. 1642-1649.
- (3) 石田誠・井川秀信, 日本機械学会論文集, 59A-561 (1993), pp. 1262-1269.
- (4) 井川秀信, 久留米工業大学研究報告, No. 31 (2008), pp. 15-20.
- (5) 井川秀信, 久留米工業大学研究報告, No. 33 (2010), pp. 7-13.
- (6) 井川秀信, 久留米工業大学研究報告, No. 42 (2019), pp. 89-99.
- (7) 村上敬宜, 応力集中の考え方, 養賢堂, p. 34.