

〔論 文〕

2 個の等長傾斜き裂の解析

(第 1 報 : 引張応力を受ける無限板)

井川 秀信*¹Analysis of Two Equally-Inclined Cracks
(Part I: Infinite Plate Subjected to Tensile Stress)Hidenobu IGAWA*¹

Abstract

This paper considers two equally-inclined cracks in an infinite plate. The analysis uses the Body Force Method by satisfying the traction-free conditions for crack edges wherein expressions of body force densities based on resultant forces are introduced to obtain results of high accuracy. Numerical calculation is performed for various arrays of cracks under tensile stress

Key Words : Craks, Stress intensity factor, Tensile stress, Body force method

1. 緒 言

疲労破壊は、き裂の発生と成長により最終破壊に至る現象であるが、き裂発生の初期段階やき裂の成長期には材料内部に微小き裂が数多く分布しており、それらの干渉がき裂成長に影響する。

疲労寿命の予測にはき裂先端の応力場を示すパラメータである応力拡大係数が重要な役割を持ち、それを高精度に求めるための応力解析法の研究やコンピュータによるシミュレーションが数多く行われてきた。

著者らは、これまで Laurent 展開法による応力解析法を開発し、複数個のき裂に対する応力拡大係数の結果を与えた^{(1)~(4)}。しかし Laurent 展開法では 2 個以上のき裂が互いに接近すると急激に計算精度が低下する欠点がある。そこでこの問題を解決するため、体積力法による応力解析法の研究を進めている^{(5)~(9)}。

本研究は、引張条件下における 2 個の傾斜き裂による応力干渉問題について、新たな応力解析法を提案すると共にき裂の干渉が応力拡大係数に与える影響を調べたものである。

解析では、2 個のき裂が任意に分布する場合について汎用的で高精度な応力解析法を提案する。高精度な解析結果を得るため、き裂相当面に体積力対を分布させてき裂縁を自由とする方法および合力に基づく境界分割法を用いて体積力の重み定めることにより精度の高い結果を得ることができる。また本法を用いていくつかの典型的な配置をした 2 個の傾斜き裂についてき裂の大きさおよび傾斜角度を系統的に変えて解析を行い、応力拡大係数の解析結果からき裂干渉について検討する。

2. 解析方法

二次元弾性問題における応力、合力の成分は、複素応力関数 $\phi(z)$ 、 $\psi(z)$ とそれらの微係数によって次のように与えられる。

$$\sigma_y + \sigma_x = 4\text{Re}[\phi'(z)] \quad (1)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\phi''(z) + \psi''(z)] \quad (2)$$

*¹ 交通機械工学科
令和元年10月18日受理

$$P_y + iP_x = -\bar{\phi}(\bar{z}) - z\phi'(z) - \psi'(z) \tag{3}$$

先ず, 図 1 に示した無限板に角度 β の傾斜をもつき裂を考える. 原点 O に対するき裂中央の位置を ζ とし, き裂長さを $2a$ とする. またき裂面に沿った法線方向 n と接線方向 s を図のように定める.

本研究の解析には, 図 2(a), (b) に示すような, 無限板内の任意の点 z に作用する 2 種類の集中力対が基礎となる. これらに対する複素応力関数は次式(4), (5)で与えられる. 但し, ここで取扱うような, 境界条件が自平衡な荷重だけで与えられ, かつ応力状態だけを対象とする問題では, 結果はポアソン比 ν に関係しないので, 便宜上, ν を 0 とした.

引張り型集中力対 R :

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= -\frac{R}{8\pi} \frac{e^{2i\beta}}{z-\zeta} \\ \psi_1 &= -\frac{R}{8\pi} \left[\frac{2}{z-\zeta} + \frac{\bar{\zeta} e^{2i\beta}}{(z-\zeta)^2} \right] \end{aligned} \tag{4}$$

せん断型集中力対 Q :

$$\begin{aligned} \phi_2(z) &= \frac{iQ}{8\pi} \frac{e^{2i\beta}}{z-\zeta} \\ \psi_2(z) &= \frac{iQ}{8\pi} \frac{\bar{\zeta} e^{2i\beta}}{(z-\zeta)^2} \end{aligned} \tag{5}$$

従って, P, Q が同時に作用する場合の関数は,

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \phi_1(z) + \phi_2(z), \\ \psi'(z) &= \psi_1'(z) + \psi_2'(z) \end{aligned} \tag{6}$$

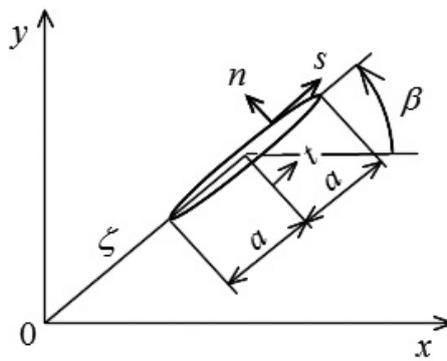
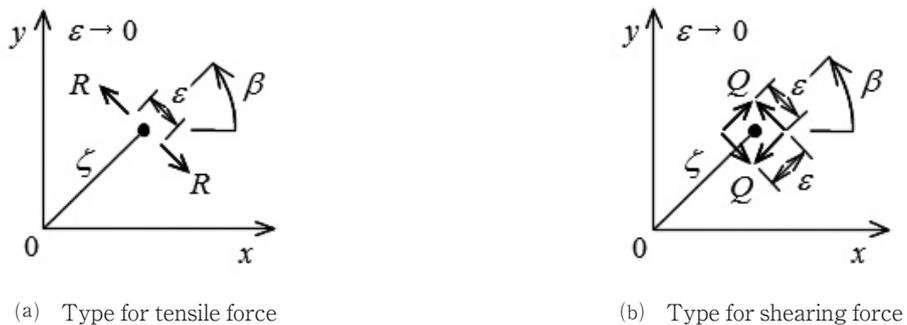


Fig. 1 Inclined crack.



(a) Type for tensile force

(b) Type for shearing force

Fig. 2 Body force densities.

となり, き裂面に沿った法線方向 n と接線方向 s の合力は次式から求められる.

$$\begin{aligned} P_n + iP_s &= (P_x + iP_y)e^{i\theta} \\ &= [-\bar{\phi}(\bar{z}) - \bar{z}\phi'(z) - \psi'(z)]e^{i\theta} \end{aligned} \quad (7)$$

き裂面を自由縁とするために引張り型の体積力対 $R=p(t)dt$ とせん断型の体積力対 $Q=q(t)dt$ をき裂相当面に分布させる. ここに $p(t)$, $q(t)$ はき裂面に分布させる体積力の密度であり, t は図 1 に示したき裂中央からの距離である. き裂解析には各き裂縁に体積力対を分布させる必要がある. 各き裂の座標系と幾何学パラメータを図 3 の様に定め, 各き裂先端局部応力場の特性に適合する次の関係式を用いる.

$$\begin{aligned} p(t) &= 4\sqrt{a_i^2 - t^2}f_i(t), \\ q(t) &= 4\sqrt{a_i^2 - t^2}g_i(t) \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)の重み関数 $f_i(t)$, $g_i(t)$ は, 図 4 に示した折れ線関数による合力境界分割法で求めた.

各き裂長さを $2a$ とするとき, き裂端 A_i, B_i ($i=1, 2$) の応力拡大係数は次式で求められる.

$$\begin{aligned} K_{IA_i}, K_{IB_i} &= [f_i(t)]_{t=\pm a} \sqrt{\pi a}, \\ K_{IIA_i}, K_{IIB_i} &= [g_i(t)]_{t=\pm a} \sqrt{\pi a} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (9)$$

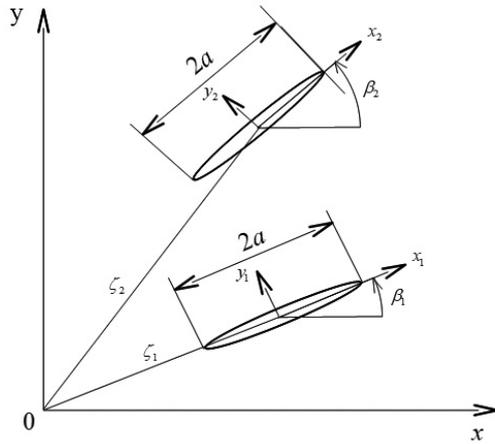


Fig. 3 Equal inclined cracks in wide plate

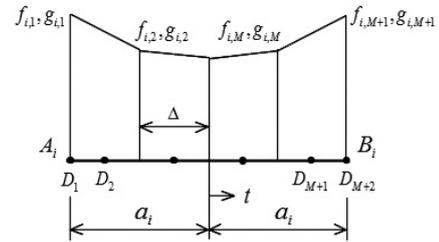


Fig. 4 Distribution of body force densities

3. 解析結果

3. 1 無次元応力拡大係数

本研究では, 次式で定義されたモード I, モード II の無次元応力拡大係数を求めた.

無次元応力拡大係数

$$\begin{aligned} F_{IA_i} &= \frac{K_{IA_i}}{\sigma\sqrt{\pi a}}, \quad F_{IB_i} = \frac{K_{IB_i}}{\sigma\sqrt{\pi a}}, \\ F_{IIA_i} &= \frac{K_{IIA_i}}{\sigma\sqrt{\pi a}}, \quad F_{IIB_i} = \frac{K_{IIB_i}}{\sigma\sqrt{\pi a}} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (10)$$

無限板に引張応力を受ける一つの傾斜き裂をもつ場合の無次元応力拡大係数は, 次式で与えられる.

$$\begin{aligned} F_I &= \cos^2 \beta, \\ F_{II} &= \cos \beta \sin \beta \end{aligned} \quad (11)$$

3. 2 計算精度の検討

本研究では, き裂長さ $2a$, き裂中心間隔を $2d$ から求められるパラメータを次式で与える.

$$\lambda = \frac{a}{d} \tag{12}$$

表 1 は, 図 5 に示した 2 個のき裂がー列に配置した場合 (Problem A) および平行に配置した場合 (Problem B) の無次元応力拡大係数 F_{LB_1} を示したものである. 本法は, 表中に示した Laurent 展開法による結果⁽¹⁾と $\lambda=0.8$ までほぼ一致を示している. また本法では λ が 0.8 を超えても計算可能であり, 2 個のー列き裂の端が互いに接触する手前 $\lambda=0.9$ 付近まで精度よく解析できる.

本研究では, き裂の相互干渉に着目しており, 2 個のき裂の内側に近接するき裂端の応力拡大係数を重点的に調べる.

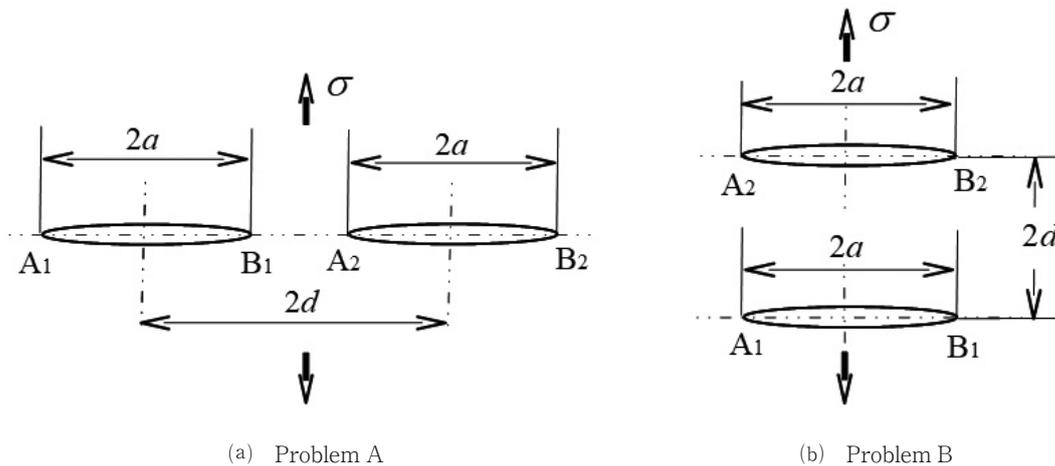


Fig. 5 Two cracks subjected a tension

Table 1 Values of F_{LB_1} for Problem A and Problem B.

Problem A (F_{LB_1})			Problem B (F_{LB_1})		
a/b	Laurent's Method	This Method	a/b	Laurent's Method	This Method
0.0	1.0000	1.0000	0.0	1.0000	1.0000
0.2	1.0057	1.0057	0.2	0.9857	0.9858
0.4	1.0272	1.0272	0.4	0.9505	0.9505
0.6	1.0804	1.0804	0.6	0.9092	0.9092
0.8	1.2289	1.2286	0.8	0.8722	0.8722
0.9	—	1.4520	0.9	—	0.8566

3. 3 解析結果と応力干渉効果

(1) 平行傾斜き裂の干渉 (Case (1))

図 6 は, 図に示すように 2 個のー列き裂 ($\theta = 0$) を 2 個同時に反時計周りに回転させた場合の平行傾斜き裂を示している. なお, 図中に示すようにき裂長さを $2a$, 2 個のき裂中心間隔を $2d$. き裂の傾斜角を θ とする.

図 7 は, 縦軸にモード I の無次元応力拡大係数 F_I を, 横軸に λ をとり, 各 θ に対する F_{LB_1} , F_{LA_1} を示したものである. 図中の実線がき裂端 B_1 の F_{LB_1} ($=F_{LA_2}$) であり, 破線がき裂端 A_1 の F_{LA_1} ($=F_{LB_2}$) である. この場合, θ が $0^\circ \sim 30^\circ$ で $F_{LB_1} > F_{LA_1}$, $45^\circ \sim 90^\circ$ で $F_{LB_1} < F_{LA_1}$ である. き裂の傾斜角では θ が 0° で各き裂端の F_I が最大となり, θ が大きくなると F_I の曲線が低下する. また, λ の増大, すなわちき裂端の接近に伴いき裂干渉の影響が大きくなるが, 応力拡大係数に与える影響は, θ により各き裂端の F_I を増大させたり減少させたりする.

図 8 は, 傾斜角 θ が $0 \sim 45^\circ$ の範囲について各 θ に対するモード II の無次元応力拡大係数 F_{II} を示したものである. 図中の実線がき裂端 B_1 の F_{IIB_1} ($=F_{IIB_2}$) であり, 破線がき裂端 A_1 の F_{IIA_1} ($=F_{IIB_2}$) である. この場合, $\theta=45^\circ$ で F_{II} が最大となり, これより θ が大きくても小さくても F_{II} の曲線が低下する. また, λ に対するき裂干渉の影響は, θ が $15^\circ \sim 45^\circ$ で大きく現れ, 特にき裂端 B_1 の F_{IIB_1} を増大させる.

図9は、縦軸にモードIおよびモードIIの無次元応力拡大係数 F 、横軸にき裂の傾斜角 θ をとり、 λ が0, 0.5, 0.9

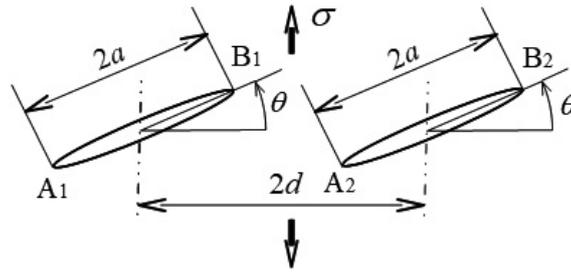


Fig. 6 Parallel inclined cracks as Case (1)

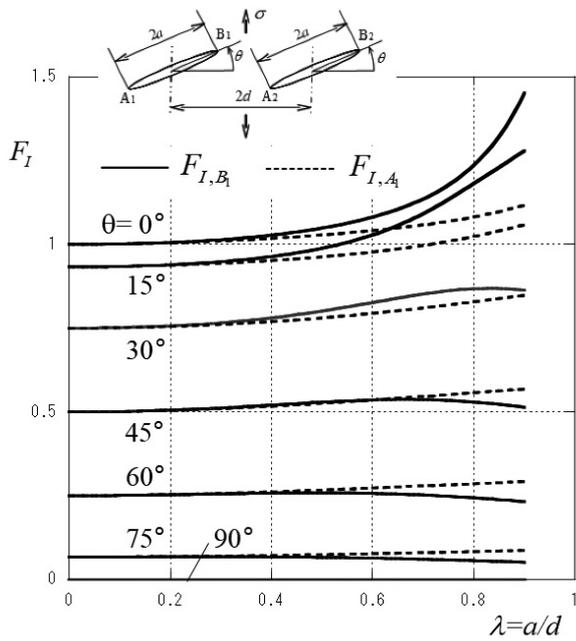


Fig. 7 F_I, λ -relations for Case (1)

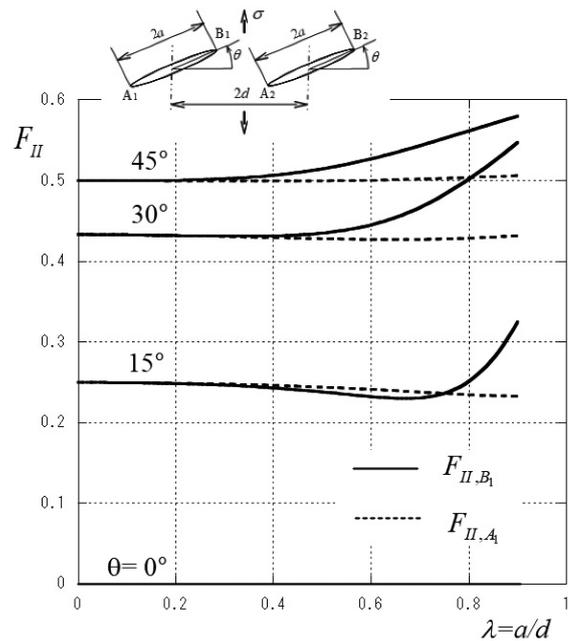


Fig. 8 F_{II}, λ -relations for Case (1)

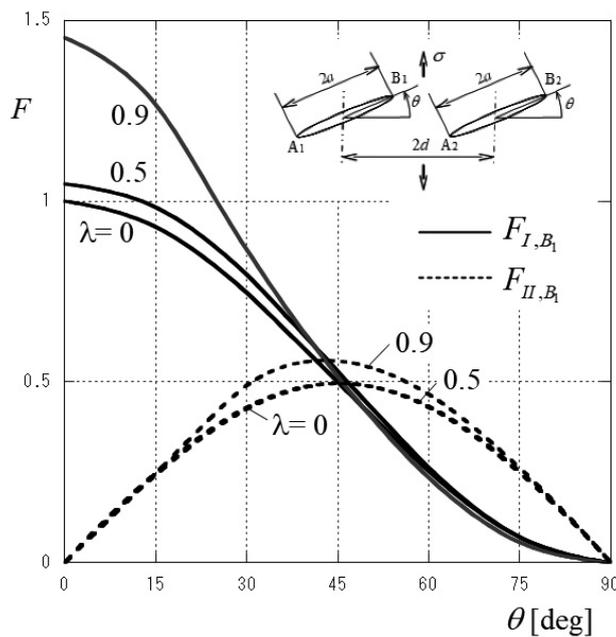


Fig. 9 F, θ -relations for Case (1)

の F_{IB_1} , F_{IIB_1} を示したものである. なお, $\lambda = 0$ の無次元応力拡大係数は, 式(11)で与えられる. この場合, 2 き裂の内側に近接するき裂端のき裂干渉に着目する. θ に対するき裂干渉の影響は, モード I で $0^\circ \sim 30^\circ$, モード II で $30^\circ \sim 60^\circ$ の範囲で大きく現れる. そして, 応力拡大係数に与える影響が最も大きく現れる傾斜角 θ は, モード I で 0° , モード II で 45° である.

(2) ハの字型傾斜き裂の干渉 (Case (2))

図10は, 図に示すように 2 個の一系列き裂 ($\theta = 0^\circ$) を一方が反時計周りに, 他方が時計回りに回転させた場合のハの字型傾斜き裂を示している.

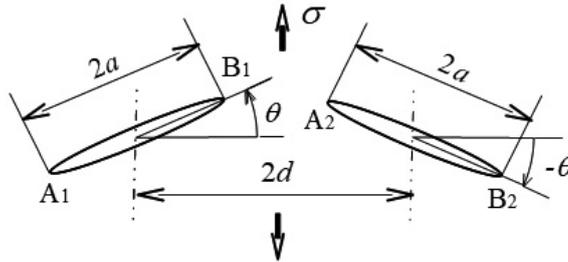


Fig. 10 ハ-shaped cracks as Case (2)

図11は, モード I の無次元応力拡大係数 F_I を示したものである. 図中の実線がき裂端 B_1 の F_{IB_1} ($=F_{IA_2}$) であり, 破線がき裂端 A_1 の F_{IA_1} ($=F_{IB_2}$) である. この場合, θ の全範囲で $F_{IB_1} > F_{IA_1}$ である. 傾斜角 θ に対する無次元応力拡大係数 F_I は, $\theta = 0^\circ$ で最大となり, θ が大きくなると F_I の曲線が低下する. また, λ の増大, すなわちき裂端の接近に伴いき裂干渉の影響が大きくなるが, 応力拡大係数に与える影響は, θ により傾向が異なる.

図12は, 傾斜角 θ が $0 \sim 45^\circ$ の範囲について各 θ に対するモード II の無次元応力拡大係数 F_{II} を示したものである. 図中の実線が F_{IIB_1} ($= -F_{IIA_2}$) であり, 破線が F_{IIA_1} ($= -F_{IIB_2}$) である. この場合, 図に示す θ の範囲で $F_{IIA_1} > F_{IIB_1}$ であり, 外側のき裂端 A_1 の応力拡大係数が大きい. また無次元応力拡大係数 F_{II} は, 傾斜角 $\theta = 45^\circ$ で最大となり, これより θ が大きくても小さくても減少する.

図13は, 縦軸に無次元応力拡大係数 F , 横軸にき裂の傾斜角 θ をとり, λ が 0, 0.5, 0.9 に対する F_{IB_1} , F_{IIB_1} を示したものである. なお, $\lambda = 0$ の無次元応力拡大係数は, 式(12)で与えられる. θ に対する応力干渉の影響は, モード I では θ

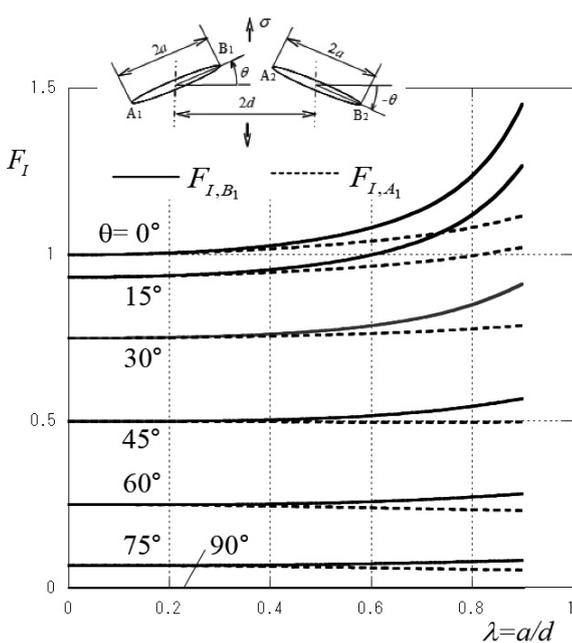


Fig. 11 F_I, λ -relations for Case (2)

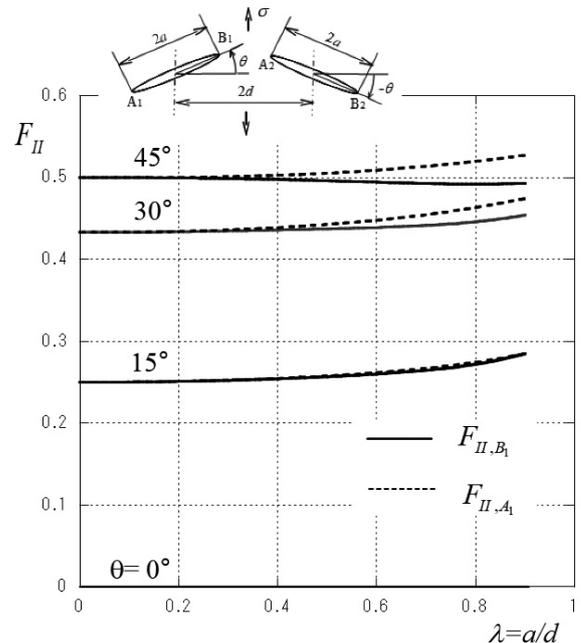
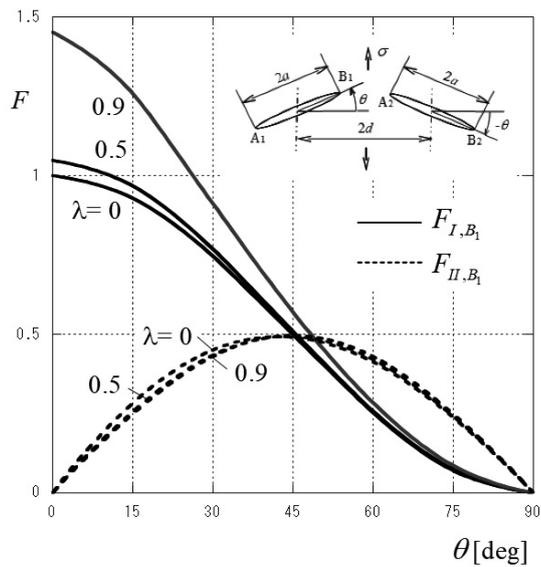


Fig. 12 F_{II}, λ -relations for Case (2)

Fig. 13 F, θ -relations for Case (2)

が $0^\circ \sim 45^\circ$ で大きく現れるが、モードIIでは θ の全範囲でほとんど変化がない。

(3) 平行傾斜き裂の干渉 (Case (3))

図14は、図に示すように上下2個の平行き裂 ($\theta = 0^\circ$) を反時計周りに回転させた場合の傾斜き裂を示している。

図15は、モードIの無次元応力拡大係数 F_I を示したものである。図中の実線が F_{I,B_1} ($=F_{I,A_2}$)であり、破線が F_{I,A_1} ($=F_{I,B_2}$)である。この場合、 θ の広い範囲で $F_{I,B_1} > F_{I,A_1}$ である。き裂の傾斜角では、 θ が 0° で F_I が最大となり、 θ が大きくなると F_I の曲線が低下する。また、 λ の増大、すなわちき裂端の接近に伴いき裂干渉の影響が大きくなるが、応力拡大係数の影響は、 θ により幾分異なるもののほぼ λ の増大で F_I を減少させる。

図16は、傾斜角 θ が $0 \sim 45^\circ$ の範囲について各 θ に対する F_{II} を示したものである。図中の実線が F_{II,B_1} ($=F_{II,A_2}$)であり、破線が F_{II,A_1} ($=F_{II,B_2}$)である。この場合、 $\theta = 45^\circ$ で F_{II} が最大となり、これより θ が大きくても小さくても応力拡大係数の曲線が低下する。また、 λ に対するき裂干渉は、 θ が $15^\circ \sim 45^\circ$ では F_{II} を減少、 $0^\circ \sim 15^\circ$ では F_{II} を減少または増大させ、複雑な傾向を示している。

図17は、 λ が0, 0.5, 0.9について F_{I,B_1} , F_{II,B_1} を示したものである。この場合、 θ に対するき裂干渉の影響は、モードIでは $0^\circ \sim 30^\circ$ 、モードIIでは $15^\circ \sim 60^\circ$ の範囲で大きく現れる。そして、その影響が最も大きく現れる傾斜角 θ はモードIでは 0° であり、 λ の増大で F_{I,B_1} の曲線が低下する。一方、モードIIでは $\theta = 45^\circ$ であるが、 λ が増大で F_{II,B_1} の曲線が低下する。

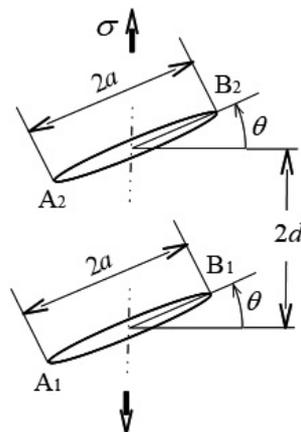


Fig. 14 Parallel inclined cracks as Case (3)

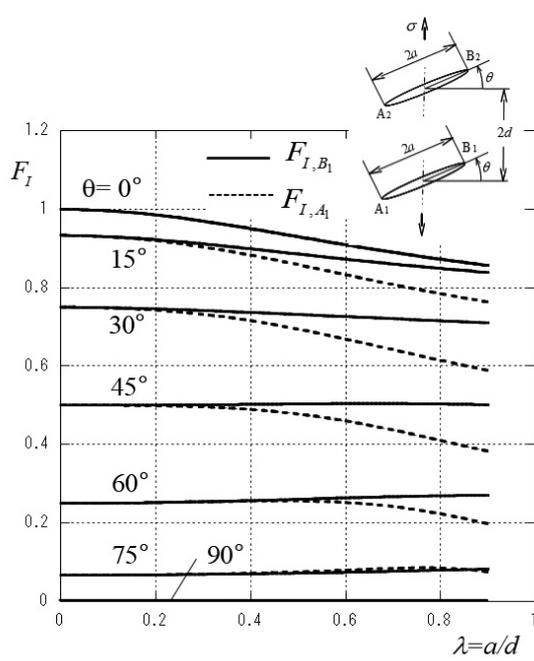


Fig. 15 F_I, λ -relations for Case (3)

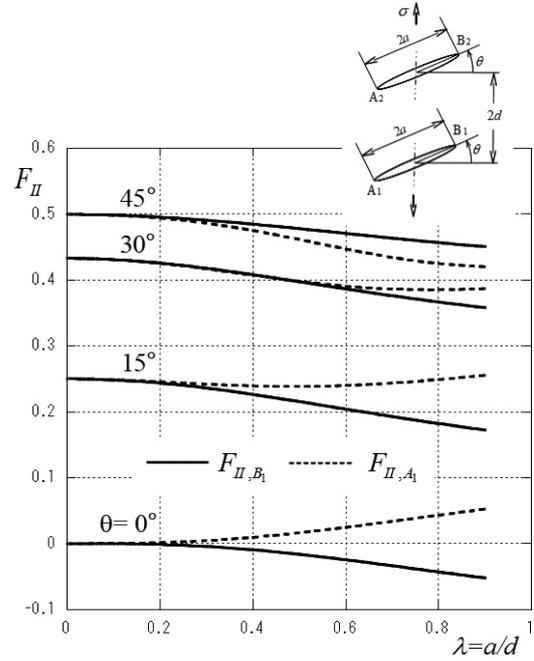


Fig. 16 F_{II}, λ -relations for Case (3)

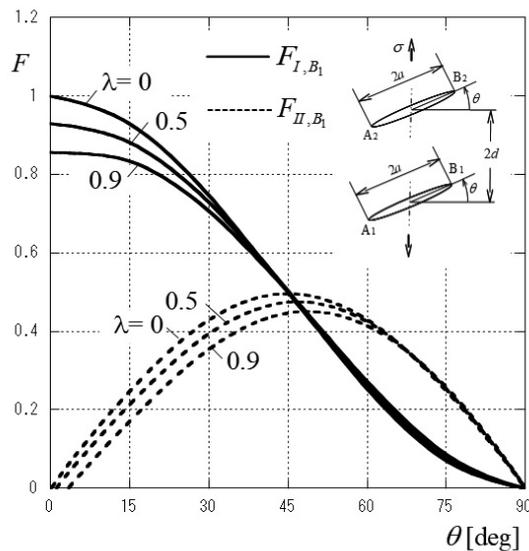


Fig. 17 F, θ -relations for Case (3)

(4) く字型傾斜き裂の干渉 (Case (4))

図18は、図に示すように上下に2個の平行き裂 ($\theta = 0^\circ$) を一方が時計周りに、他方が反時計回りに回転させた場合のく字型傾斜き裂を示している。

図19は、各 θ に対するモード I の無次元応力拡大係数 F_I を示したものである。図中の実線が F_{I,B_1} ($=F_{I,B_2}$) であり、破線が F_{I,A_1} ($=F_{I,A_2}$) である。この場合、 θ の全範囲で $F_{I,B_1} > F_{I,A_1}$ である。き裂の傾斜角 θ に対する応力拡大係数は $\theta = 0^\circ$ で F_{I,B_1} が最大となり、 θ が大きくなると F_I が減少する。また、 λ の増大でき裂干渉の影響が大きくなるが、応力拡大係数に与える影響は、 λ の増大で F_I を減少させる。

図20は、傾斜角度 θ が $0 \sim 45^\circ$ の範囲について各 θ に対するモード II の F_{II} を示したものである。図中の実線が F_{II,B_1} ($= -F_{II,B_2}$) であり、破線が F_{II,A_1} ($= -F_{II,A_2}$) である。この場合、図に示す θ の範囲で $F_{II,A_1} > F_{II,B_1}$ であり、外側より内側のき裂端 A_1 の F_{II,A_1} が大きい。また F_{II} は、傾斜角 $\theta = 45^\circ$ で最大となり、これより θ が大きくても小さくても減少する。また、き裂干渉の影響は、 λ の増大で各 θ の F_{II,B_1} を減少させる。一方、 F_{II,A_1} は、 θ が $30^\circ \sim 45^\circ$ では λ の増大で減少、 $0^\circ \sim 30^\circ$ で

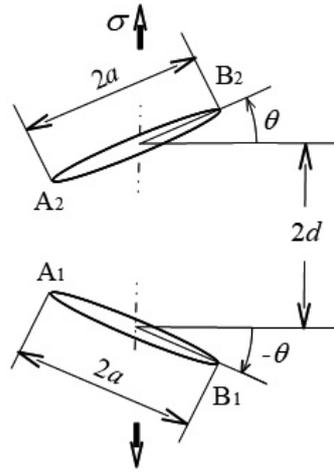


Fig. 18 <-shaped cracks as Case (4)

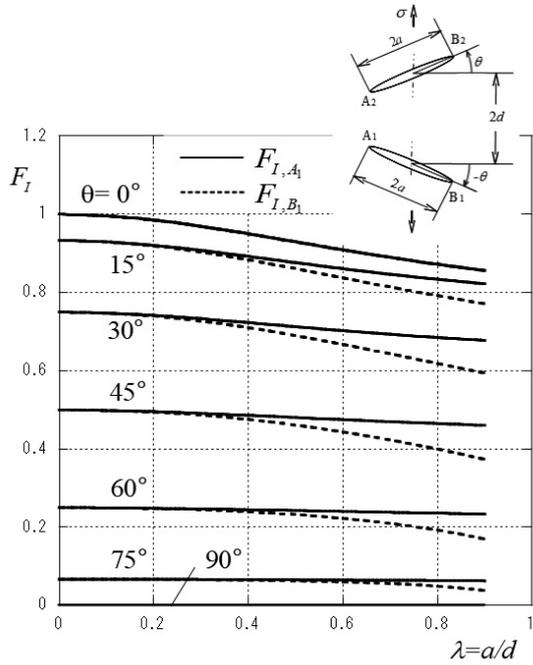


Fig. 19 F_I, λ -relations for Case (4)

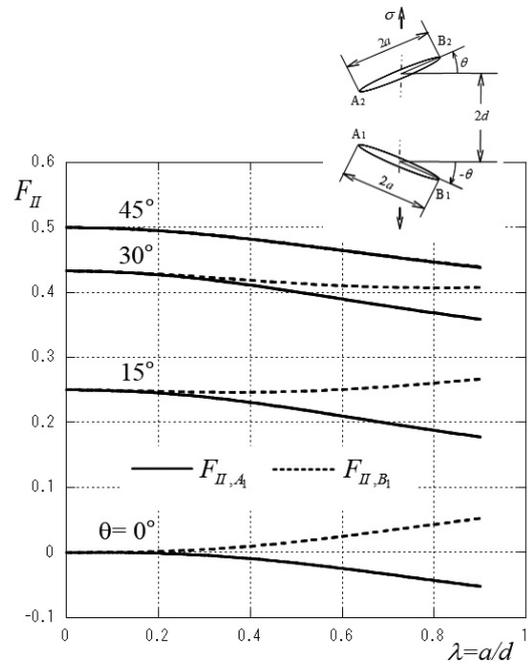


Fig. 20 F_{II}, λ -relations for Case (4)

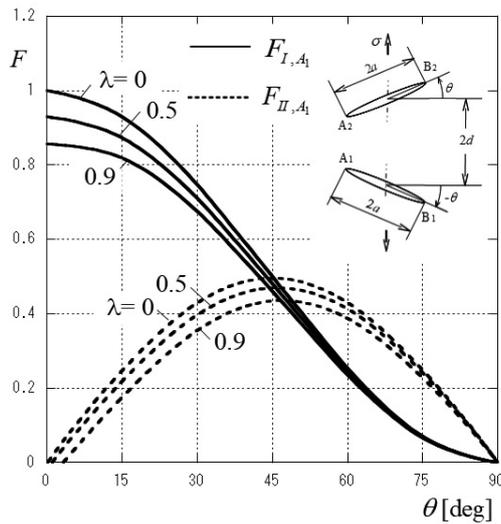


Fig. 21 F, θ -relations for Case (4)

は逆に増大する。

図21は、 λ が0, 0.5, 0.9に対する F_{I, B_1} , F_{II, B_1} を示したものである。この場合、 θ に対する応力干渉の影響は、モード I では $0^\circ \sim 30^\circ$ 、モード II では $15^\circ \sim 60^\circ$ の範囲で大きく現れる。そして、その影響が最も大きく現れる傾斜角はモード I ではシステム $\theta = 0^\circ$ であり、 λ が大きくなると F_{I, B_1} の曲線を低下させる。一方、モード II では 45° であるが、 λ が大きくなると F_{II, B_1} の曲線を低下させる。

(5) 引張方向に直角なき裂と傾斜き裂の干渉 (Case (5))

図22は、図に示すように水平なき裂と反時計回りに回転させた傾斜き裂を示している。

図23は、傾斜角 θ が $0 \sim 90^\circ$ の範囲について各 θ に対する F_{I, B_1} を示したものである。き裂の傾斜角 $\theta = 0^\circ$ で F_{I, B_1} が最大となり、 θ が大きくなると F_{I, B_1} の曲線が低下する。また、 λ の増大、すなわちき裂端の接近に伴いき裂の応力干渉の影響が大きくなり、 F_{I, B_1} を増大させる。

図24は、縦軸に無次元応力拡大係数 F 、横軸にき裂の傾斜角 θ をとり、 λ が0, 0.5, 0.9に対するき裂端 A_2 の F_{I, A_2} , F_{II, A_2} を示したものである。この場合、 θ に対する応力干渉の影響は、モード I では、 θ が $0^\circ \sim 60^\circ$ で大きく現れ、 λ の増大で F_{I, A_2} の値が大きくなる。また、モード II では、 θ が $15^\circ \sim 90^\circ$ で大きく現れ、 λ の増大で F_{II, A_2} の値が大きくなる。

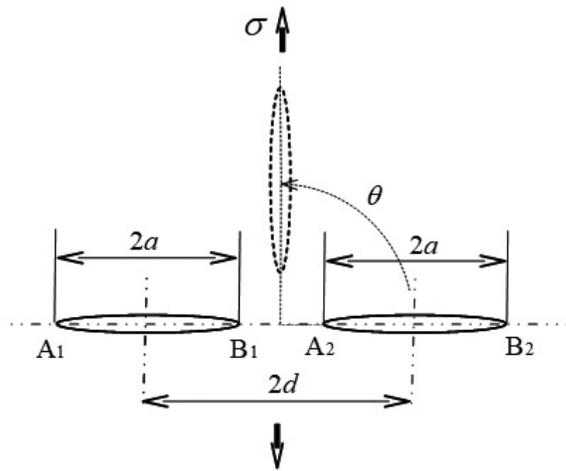


Fig. 22 Inclined crack as Case (5)

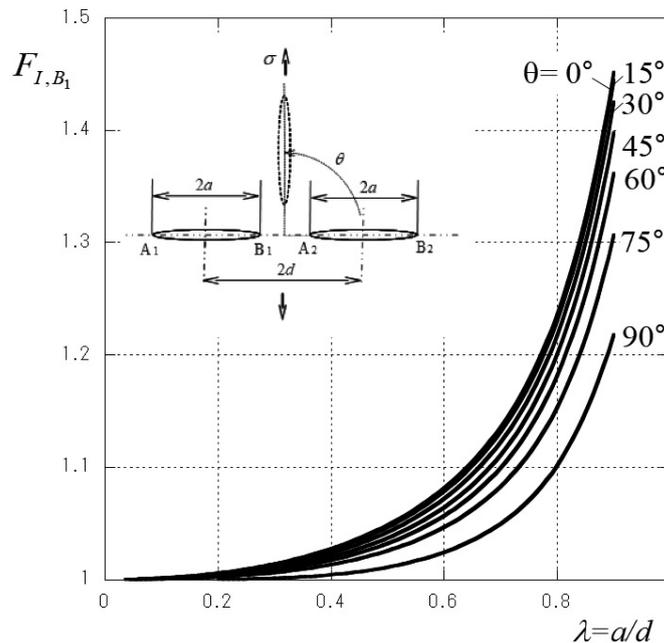
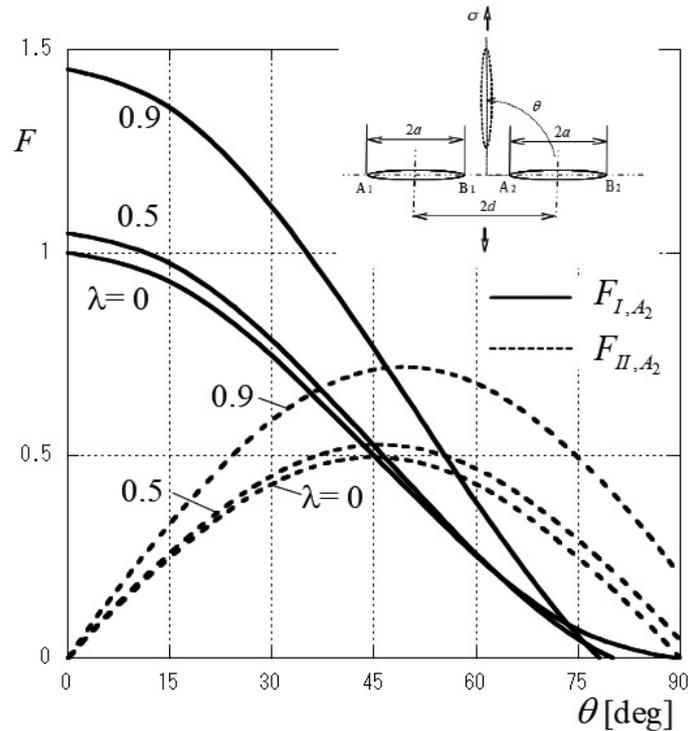


Fig. 23 F_{I, B_1} , λ -relations for Case (5)

Fig. 24 F, θ -relations for Case (5)

4. 結 論

- (1) 無限板に2個の等長き裂が任意の位置・角度で分布する場合について体積法による高精度応力解析法を開発した。
- (2) 本法を用いて2個のき裂による干渉効果を調べるため、Case (1)～Case (5)のモデルについて解析を行い、各き裂端の無次元応力拡大係数の結果を与えた。これらの資料を基にき裂干渉が応力拡大係数に与える影響を明らかにした。
- (3) 2個のき裂が引張方向と直角に位置する場合（Case (1), (2)）では、隣接するき裂端の接近、すなわちき裂干渉によりき裂の傾斜角 θ の広い範囲でモード I の応力拡大係数が増大する。
- (4) 2個のき裂が上下方向に位置する場合（Case (3), (4)）では、き裂干渉によりき裂の傾斜角 θ の広い範囲でモード I の応力拡大係数が減少する。
- (5) モード II の応力拡大係数は、Case (1)～Case (5)のモデルではき裂の傾斜角が $\theta = 45^\circ$ で最大となる。また、き裂干渉の影響は、隣接するき裂の位置や傾斜角により複雑となり、それらにより応力拡大係数の増大・減少が異なる。

参考文献

- (1) 石田誠・井川秀信, 久留米工業大学研究報告, No. 15 (1991), pp. 11-28.
- (2) 石田誠・井川秀信, 日本機械学会論文集, 58A-553 (1992), pp. 1642-1649.
- (3) 石田誠・井川秀信, 日本機械学会論文集, 59A-561 (1993), pp. 1262-1269.
- (4) M. Isida, H. Igawa, International Journal of Fracture Vol. 65 (1994), pp. 247-259.
- (5) 井川秀信・平野貞三, 日本機械学会講演論文集, No. 95-5 (1999), pp. 421-422.
- (6) 井川秀信・野田尚昭, 日本機械学会講演論文集, No. 008-1 (2000), pp. 175-176.
- (7) 井川秀信・野田尚昭, 日本機械学会講演論文集, No. 00-1 (2000), pp. 79-80.
- (8) 井川秀信, 日本機械学会講演論文集, No. 005-2 (2000), pp. 53-54.
- (9) 井川秀信・隈部晃・野田尚昭, 日本機械学会講演論文集, No. 01-1 (2001), pp. 135-136.