

〔論 文〕

二輪車の直進安定性解析手法

—固有ベクトルの特性を導入する新しい解析方法—

吉野 貴彦^{*1}・片山 硬^{*2}

Straight-line Stability Analysis Method for Motorcycles (New Analysis Method Introducing Eigenvectors)

Takahiko YOSHINO^{*1}, Tsuyoshi KATAYAMA^{*2}

Abstract

Theoretical analysis using a mathematical model and driving experiments revealed the existence of three unstable motion forms when a motorcycle runs straight. To improve the straight-line stability, it is essential to elucidate the mechanism of occurrence of two vibration modes, namely weave and wobble modes. The mechanism of occurrence of these modes has not been clarified via conventional analysis. Hence, new methodologies are required to analyze these modes. This study proposes a new straight-line stability analysis by introducing eigenvectors. By applying this method, the generation mechanisms of the wobble and weave modes are revealed.

Key Words : Handling and Stability, Vehicle Dynamics, Maneuverability, Motorcycle, Energy Flow Method

1. はじめに

自転車・モーターサイクルはシングルトラックビークルと呼ばれている二輪車であるが、その構造に由来した不安定性の問題を抱えている。その代表的なものに直進安定性がある。

二輪車の運動特性に関する解析は19世紀から行われているが、本格的に解析が進展したのは20世紀の後半である。特に計算機の発達により、1970年代に数学モデル⁽¹⁾を用いた固有値計算が可能となり、飛躍的に進歩した。

この数学的モデルを使った理論解析と走行実験^{(2)~(4)}により、二輪車が直進走行する際に示す三つの不安定な運動形態の存在が明らかにされた。これらのモードはキャップサイズモード、ウォブルモードおよびウィーブモードと呼ばれている。キャップサイズモードは車体が傾斜して転倒する運動であり、低速域では安定で高速域では不安定になる。ウォブルモードは主にハンドル系が数 Hz~10Hz で振動するもので、高速域で不安定になる。ウィーブモードは1 Hz~3 Hz の振動で、横運動、ヨー運動（上下軸まわりの回転）、ロール運動およびハンドル系の運動が連成している。

これらのモードのうち、ウォブルモードとウィーブモードの安定性が実際に運転する際に問題となる。特に、ウィーブモードは高速域で不安定となり、ライダーがコントロールを誤ると、転倒する。高速域で不安定となるいわゆる高速ウィーブモードは二輪車の運動現象の中で最も危険な運動形態の一つであると考えられている。

これらの振動モードの解析には、二つの大きな問題がある。第一になぜ高速になるとウィーブモードが不安定になるのか。また第二に、これは二輪車メーカーが経験則として認識しているものであるが、ウィーブモードを安定化させる設計をすると、ウォブルモードが不安定になり、またその逆も生じる。二輪車の安全性の観点から、これらは長年世界中の二輪車メーカー、研究者が解決に取り組んでいる。

二輪車の安全性向上には、ウィーブモードおよびウォブルモードの発生メカニズムを解明することが喫急の課題であるが、現時点においても完全には把握されていない。その要因は、運動を記述する数学モデルが複雑であり、車両の設計諸元が複雑に関連していることである。

1980年代になり、片山⁽⁵⁾により、この問題にブレークスルーをもたらす新しい解析手法が提案された。これは、振動

*1 交通機械工学科

*2 インテリジェントモビリティ研究所

平成30年9月1日受理

モードが発生している際に運動の自由度間に生じるエネルギーの流れを解析するもので、エネルギーフロー法と名付けられている。

ここでは、エネルギーフロー法を基礎に、固有ベクトルの特性を詳細に用いることにより、振動モード発生メカニズムを理解する新しい解析手法を述べる。

2. 一般的な解析手法

2・1 数学モデル

一般的には、二輪車の運動を表す最も単純なモデルと考えられている4自由度モデルを用いる。このモデルでは、車両は前フレームと後フレームから構成されており、横方向、ヨー回転、ロール回転および操舵の回転運動を行う。この4自由度モデルでの運動方程式は次のようになる。

$$(M_f + M_r) \ddot{y}_1 + M_f k \ddot{\psi} + (M_f j + M_r h) \ddot{\phi} + M_f e \ddot{\delta} + (M_f + M_r) \dot{x}_1 \dot{\psi} - Y_f - Y_r = 0 \tag{1}$$

$$M_f k \ddot{y}_1 + (M_f k^2 + I_{rz} + I_{fx} \sin^2 \epsilon + I_{fe} \cos^2 \epsilon) \ddot{\psi} + \{M_f j k - C_{rxz} + (I_{fe} - I_{fx}) \sin \epsilon \cos \epsilon\} \ddot{\phi} + (M_f e k + I_{fe} \cos \epsilon) \ddot{\delta} - \{i_{fy}/R_f + (i_{ry} + \lambda i)/R_r\} \dot{x}_1 \dot{\phi} + M_f k \dot{x}_1 \dot{\psi} - i_{fy}/R_f \sin \epsilon \dot{x}_1 \dot{\delta} - l_f Y_f + l_r Y_r = 0 \tag{2}$$

$$(M_f j + M_r h) \ddot{y}_1 + \{M_f j k - C_{rxz} + (I_{fe} - I_{fx}) \sin \epsilon \cos \epsilon\} \ddot{\psi} + (M_f j^2 + M_r h^2 + I_{rz} + I_{fx} \cos^2 \epsilon + I_{fe} \sin^2 \epsilon) \ddot{\phi} + (M_f e j + I_{fe} \sin \epsilon) \ddot{\delta} - \{M_f j + M_r h\} + i_{fy}/R_f + (i_{ry} + \lambda i)/R_r \dot{x}_1 \dot{\psi} + i_{fy}/R_f \cos \epsilon \dot{x}_1 \dot{\delta} - (M_f j + M_r h) g \phi + (t Z_f - M_f e g) \delta = 0 \tag{3}$$

$$M_f e \ddot{y}_1 + (M_f e k + I_{fe} \cos \epsilon) \ddot{\psi} + (M_f e j + I_{fe} \sin \epsilon) \ddot{\phi} + (I_{fe} + M_e e^2) \ddot{\delta} + (M_f e + i_{fy}/R_f + \sin \epsilon) \dot{x}_1 \dot{\psi} - i_{fy}/R_f \cos \epsilon \dot{x}_1 \dot{\phi} + (t Z_f - M_f e g) \phi + (t Z_f - M_f e g) \sin \epsilon \delta + t Y_f = 0 \tag{4}$$

ここで使用している主要な記号を以下に記す。詳細は文献(1)に記載されている。

M_f, M_r : 前後フレームの質量. $I_{fx}, I_{fe}, I_{rx}, I_{rz}$: 前後フレームの慣性モーメント. C_{rxz} : 後フレームの慣性乗積. i_{fy}, i_{ry} : 前後輪の慣性モーメント. λ : エンジンフライホイールの慣性モーメント. Z_f : 前輪荷重. R_f, R_r : 前後タイヤの回転半径. Y_f, Y_r : 前後タイヤのコーナリングフォース. \dot{x}_1 : 前後速度. \dot{y}_1 : 横速度. $\dot{\psi}$: ヨー角速度. $\dot{\phi}$: ロール角速度. δ : 操舵角. g : 重力加速度. ϵ : フロントフォークのキャスター角.

2・2 固有値解析

直進走行時の運動特性を検討する際には、上述の式(1)~(4)の固有値および固有ベクトルが求められる。固有値は一般に複素数となり、良く知られているように、実数部分はモードの安定性を表現しており、虚数部分は振動数を表わす。

固有値解析は、車両の設計・開発に使用されるが、図1に示すように、車両の設計諸元を変更し、固有値の変化を見ることにより、その車両諸元変更が直進安定性に及ぼす影響を把握する。多くの車両諸元の影響を検討した上で、より良い組み合わせを用いて、開発が行われている。



Fig. 1 Existing eigenvalue analysis used in vehicle design

3. エネルギーフロー法

上述のように車両の開発には、設計パラメータを変更し、固有値の変化を見ることにより、そのパラメータの寄与を把握している。しかし、二輪車の運動方程式は式(1)~(4)が示すように、車両諸元が複雑に絡み合い、固有値の変化がど

のようなメカニズムにより生じているか等は理解できない。いわば、車両の特性はブラックボックスとなっており、二輪車の運動特性の本質を理解する妨げになっている。

そこで、このブラックボックスの中が把握できる、エネルギーフロー法が提案された。ここでは、操舵系の振動であるウォブルモードを例にとり、その概略を述べる。操舵系の運動方程式は上記の式(4)である。式(4)の並べ替えを行うと以下のようになる。

$$(I_z + M_f e^2) \ddot{\delta} = -M_f e \ddot{y}_1 - (M_f e k + I_z \cos \varepsilon) \ddot{\psi} - (M_f e j + I_z \sin \varepsilon) \ddot{\phi} - (M_f e + i_{b_f}/R_f + \sin \varepsilon) \dot{x}_1 \dot{\psi} + i_{b_f}/R_f \cos \varepsilon \dot{x}_1 \dot{\phi} + K \dot{\delta} - (tZ_f - M_f e g) \phi - (tZ_f - M_f e g) \sin \varepsilon \delta - tY_f \quad (5)$$

式(5)は以下のように表現できる。

$$I_f \ddot{\delta} = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8 \quad (6)$$

ここで、それぞれの記号は次で与えられる。

$$\begin{aligned} I_f &\equiv I_z + M_f e^2, & F_1 &\equiv -M_f e \ddot{y}_1, & F_2 &\equiv -(M_f e k + I_z \cos \varepsilon) \ddot{\psi}, & F_3 &\equiv -(M_f e j + I_z \sin \varepsilon) \ddot{\phi} \\ F_4 &\equiv -(M_f e + i_{b_f}/R_f + \sin \varepsilon) \dot{x}_1 \dot{\psi}, & F_5 &\equiv i_{b_f}/R_f \cos \varepsilon \dot{x}_1 \dot{\phi}, & F_6 &\equiv -(tZ_f - M_f e g) \phi, \\ F_7 &\equiv -(tZ_f - M_f e g) \sin \varepsilon \delta, & F_8 &\equiv -tY_f \end{aligned} \quad (7)$$

エネルギーフロー法の基本的な考え方は運動エネルギーの時間的な変化を検討することにある。ウォブルモードを解析するには、操舵系の運動エネルギーの変化を計算する。操舵系の運動エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2} I_f (\dot{\delta})^2 \quad (8)$$

と表される。運動エネルギーの時間的な変化は、式(8)を時間で微分すれば求めることができる。式(8)を微分すると次のようになる。

$$\frac{d}{dt} E = I_f \dot{\delta} \cdot \dot{\delta} \quad (9)$$

さらに、運動方程式(6)を用いると式(9)は次の式(10)として表現される。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E &= I_f \dot{\delta} \cdot \dot{\delta} = (F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7 + F_8) \cdot \dot{\delta} \\ &= F_1 \cdot \dot{\delta} + F_2 \cdot \dot{\delta} + F_3 \cdot \dot{\delta} + F_4 \cdot \dot{\delta} + F_5 \cdot \dot{\delta} + F_6 \cdot \dot{\delta} + F_7 \cdot \dot{\delta} + F_8 \cdot \dot{\delta} \end{aligned} \quad (10)$$

式(10)の意味する内容は、操舵系の運動エネルギーの時間的な変化は、操舵系に作用する個々の力に操舵角速度を乗じたもので表現できる。すなわち、右辺に示す個々の項の正負により操舵系へのエネルギーが流入流出が把握できる。例えば、式(10)の右辺第1項 $F_1 \cdot \dot{\delta}$ が正の値をとったとすると、操舵系に作用する力 F_1 を通じて操舵系にエネルギーが流入しているといえる。すなわち、力 F_1 は操舵系の運動を駆動していると解釈できる。逆に第2項 $F_2 \cdot \dot{\delta}$ が負の場合には、力 F_2 は操舵系の運動を抑制していることになる。

この手法をウォブルモードに適用することにより、操舵系に作用する個々の力がウォブルモードを励起しているのか制振しているのかを把握することが可能である。すなわち、式(10)により、長年不明であったウォブルモードの発生機構を明らかにすることができる。

最初に開発されたエネルギーフロー法は、数値シミュレーションを用いたものがあるが、同様の計算は、固有ベクトルを応用した手法でも可能である。ここでは固有ベクトルを用いた方法を紹介する。

4. 固有ベクトルを用いたエネルギーフロー法

ウォブルモードを表現する固有ベクトルを式(10)に代入すると、容易にウォブルモードの発生機構が理解できる。固有値解析で得られる固有ベクトルは複素数で表現され、ベクトルの大きさおよび位相により与えられる。この時、理論的な理由により、絶対的な値は得られず、相対的な値のみが意味を持つ。すなわち、固有ベクトルの大きさおよび位相を基準とする値で規格化する必要がある。今の場合には、基準値を操舵速度の値とする。

その車速180km/hの結果例は図2のように表現される。この図は、横軸が実数部分を表し、縦軸が虚数を表現している。なお単位は無次元でヨー角速度の固有ベクトルの大きさを1にしている。この図が示すように、式(10)の各変数にそれらの固有ベクトルの値を代入すると、操舵系に作用している力の配置がえられ、この配置から、ウォブルモードの発生機構等を知ることができる。各固有ベクトルの和が操舵角加速度の値を表し、その値は固有値に比例している。すなわち、操舵角加速度の実数部分が固有値の実数部分に比例し、虚数部分が虚数部分に比例している。この性質から、各力の実数部分が、前述のエネルギー流に対応しており、ウォブルモードの発生機構を表している。これらの値が正であれば、ウォブルモードを励起しており、負の値であれば、制振している。

図2に示す力の配置から、各力の実数部分を計算した結果を図3に表す。図3から分かるよう、ウォブルモードはヨーレイト力、ロールレイト力およびロール角加速度力により励起されていることが理解できる。また、横加速度力、ヨー角加速度力および前輪タイヤ力がウォブルモードを制振していることも分かる。

このように、固有ベクトルを用いたエネルギーフロー法を適用することにより、ウォブルモードの発生機構を知ることができ、車両を開発するための指針が得られる。

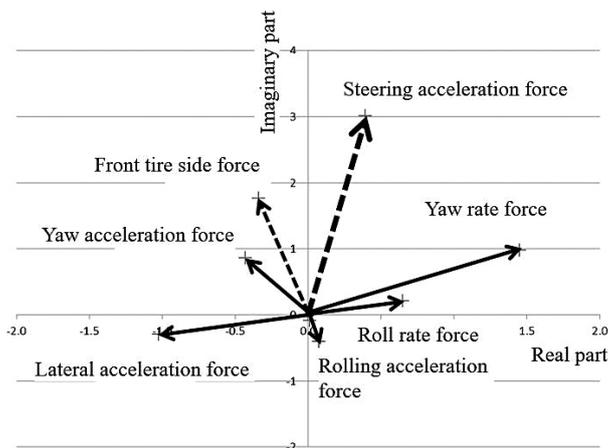


Fig. 2 Arrangement of the force acting on the wobble mode motion (180km/h)

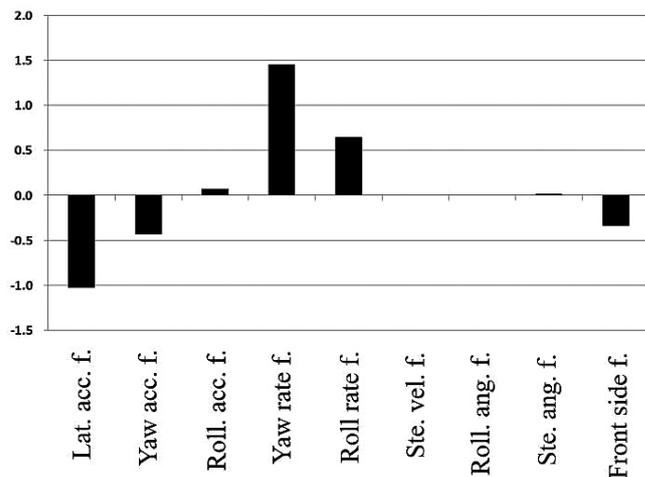


Fig. 3 Real part of the force acting on the wobble mode motion

5. ウィーブモードの発生機構

同様の手法を用いてウィーブモードの発生機構も把握できる。ウィーブモードは四つの自由度が連成したものであるが、ヨー角系が主要な役割を演じていることが指摘されている⁽⁶⁾。そのため、ウィーブモードの特性等を議論するためには、ヨー角系のエネルギー流を計算する必要がある。

ウィーブモード発生時における各力の配置をヨー角系で表現したものが図4である。この図の表現様式は、固有ベクトルの基準がヨー角速度ベクトルにとられていること以外は図2と同じである。

図4に示される各力の実数部分を示したものが、図5である。同図が示すように、横加速度力、ロールレート力およびロール角加速度力で励起され、ヨーレート力、操舵角速度および後輪タイヤ力で制振されていることが分かる。なお前輪タイヤ力は大きな力であるが、この位相配置では、実数部分への寄与は無視できる大きさである。

このように、エネルギーを計算することにより、ウィーブモードの発生機構が理解できることが分かる。この結果を見ると、ウィーブモードの安定化には、ヨーレート力の増加と横加速度力の減少が効果的であると考えられる。また後輪のタイヤ力の増強も効果があるといえる。

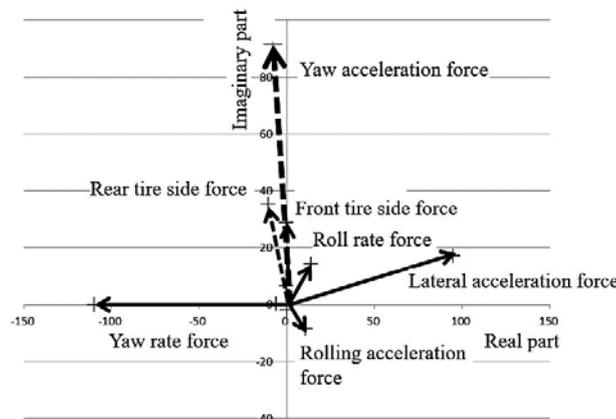


Fig. 4 Arrangement of force acting on the weave mode yawing angle motion (180km/h)

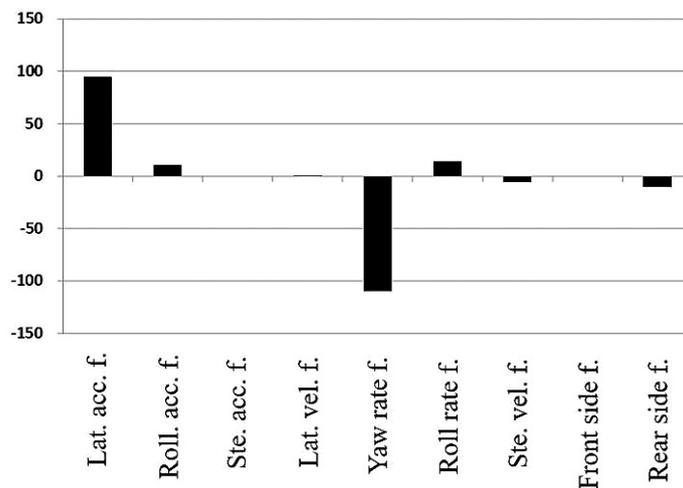


Fig. 5 Real part of the force acting on the weave mode yawing angle motion

6. 結 語

本稿では、二輪車の直進安定性を従来の解析手法で概観した後、その解析手法で明らかとなった事柄、その問題点を議論した。すなわち、直進走行時に発生する不安定モードの存在が明らかになったこと、その安全性への影響を述べた。さらに、従来の解析手法では、ウィーブモードとウォブルモードの発生機構等は明確にはならず、新しい視点が必要になることを述べた。その後、二つの振動モードの発生機構を明らかにすることができるエネルギーフロー法を紹介した。

この手法を用いて、ウォブルモードおよびウィーブモードの発生機構を述べ、両モードを安定化するための設計指針を述べた。このように、ここで提案した、固有ベクトルを用いたエネルギーフロー法は、二輪車の直進安定性の長年の課題であった、ウォブルモードおよびウィーブモードの発生機構の解明等の可能性が期待される。

文 献

- (1) Sharp, R.S., "The Stability and Control of Motorcycles", *Journal mechanical Engineering Science*, Vol. 13, No. 5 (1971), pp. 316-329.
- (2) Verma, M.K., "Theoretical and Experimental Investigations of Motorcycle Dynamics", *Doctoral Dissertation*, The University of Michigan, (1978).
- (3) Aoki, A., "Experimental Study on Motorcycle Steering Performance", *SAE paper*, No. 790265 (1979).
- (4) Nishimi, T., Aoki, A. and Katayama, T., "Analysis of Straight Running Stability of Motorcycles", *10th International Technical Conference on Experimental Safety Vehicles*, (1985).
- (5) Katayama, T. and Nishimi, T., "Energy Flow Method for the Study of Motorcycle Wobble Mode", *Vehicle System Dynamics*, Vol. 19, No. 3 (1990), pp. 151-175.
- (6) 片山 稔, "二輪車のウィーブモードの解析 第2報", *自動車研究*, Vol. 24, No. 2 (2002), pp. 63-66.