

# 長方形配置および千鳥配置のき裂群をもつ 無限体の面内せん断における応力拡大係数 とせん断剛性の計算式

井川 秀信\*・石田 誠\*\*

## Formulae of Stress Intensity Factors and Shear Stiffnesses for In-plane Shear of Elastic Solid Containing Rectangular Array and Zig-zag Array of Cracks

Hidenobu IGAWA and Makoto ISIDA

### Abstract

This paper is concerned with a theoretical analysis of a rectangular array and a zig-zag array of cracks in an infinite solid subjected to in-plane shear. We define suitable unit regions, assume the stress potentials as eigen function expansions, and determine the unknown coefficients from the boundary conditions of the used unit regions. Numerical results of the stress intensity factors and the shear stiffnesses of the cracked solids are given for various values of the parameters, and they are fitted by reliable formulae for the convenience of engineering applications.

Key Words: Theoretical Stress Analysis, Two-Dimensional Elasticity, In-plane Shear, Cracks, Stress Intensity Factor, Shear Stiffness.

### 1. 緒 言

材料や構造の破壊にさいして、これらの中に先在する複数個の欠陥からき裂が発生し、これらが互いに干渉しつつ最終破壊に至ることが多い。そのため複数個のき裂に対する応力拡大係数の解析が数多く行われ、有用な結果が得られている<sup>(1)(2)</sup>。

一方向に多数のき裂が分布する場合として、一列周期き裂群および平行き裂群が解析されている<sup>(5)(6)</sup>。また、き裂が各方向に分布する場合の典型的なモデルとして、上の一列周期き裂群がそれと直角方向に配列する場合（以下長方形配置き裂群と名付ける）と千鳥状に分布する場合（以下千鳥配置き裂群と名付ける）があるが、これら

の二つの問題については、引張りを受ける場合が解析されている<sup>(8)(11)</sup>が、面内せん断を受ける千鳥配置き裂群についてはまだ解析されていない。

本研究は、長方形配置き裂群および千鳥配置き裂群をもつ無限体の面内せん断について統一的に解析したものである。解析には一個のき裂を含む適当な単位領域を考え、その領域に適合し、き裂縁の境界条件を完全に満たす複素応力関数の固有関数展開を仮定する。そしてこの単位領域外周の境界条件を合力と変位を用いて応力状態の二方向周期性を満足する形で表し、これらによって展開の未知係数を定めた。き裂の長さそれらの配列の種々の場合について数値計算を行い、応力拡大係数およびき裂群の存在によるせん断剛性の低下を調べる。また、

\*機械工学科 \*\*久留米工業大学名誉教授

平成8年9月18日受理

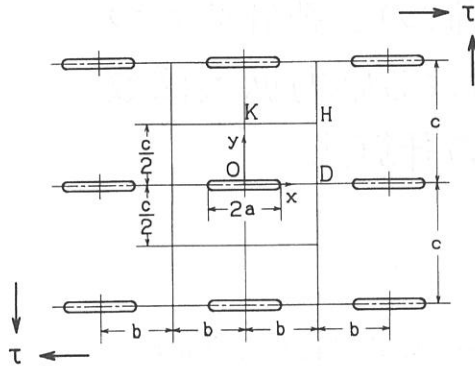


図1(a) 長方形配置き裂群をもつ無限体

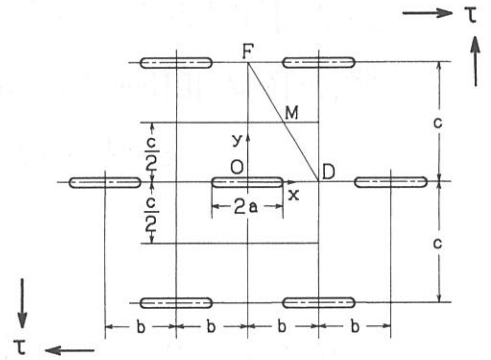


図1(b) 千鳥配置き裂群をもつ無限体

これらの数値結果に精度良く当てはまる計算式を与える。

2. 解析方法

2.1 複素応力関数

二次元弾性問題における合力と変位の成分は、二つの複素応力関数  $\phi(z)$ ,  $\Omega(z)$  によって次のように表される。

$$P_y + iP_x = -\int \phi(z) dz - \int \Omega(z) dz + (z - \bar{z})\phi(z) \dots(1)$$

$$2G(u - iv) = k \int \phi(z) dz - \int \Omega(z) dz + (z - \bar{z})\phi(z) \dots\dots\dots(2)$$

ここに、 $P_x$ ,  $P_y$  は弾性体内の一定点から動点  $(x, y)$  に至る任意の経路に沿って右の部分が左の部分に及ぼす応力の合力の成分であり、他の記号は慣例による。また  $G$  はせん断弾性係数であり、 $k$  はポアソン比  $\nu$  によって次式で与えられる弾性定数である。

$$k = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & \text{(平面応力)} \\ 3-4\nu & \text{(平面ひずみ)} \end{cases} \dots\dots\dots(3)$$

本研究では次の二つの問題を統一的に解析する。

- (a)長方形配置のき裂群をもつ無限体の面内せん断 (図1(a))
- (b)千鳥配置のき裂群をもつ無限体の面内せん断 (図1(b))

両問題を通じてき裂長さを  $2a$  とし、き裂の一つの中心に原点をとった座標系  $Oxy$  を図のように定める。それぞれの場合について、 $x$  方向および  $y$  方向のき裂間隔を与えるパラメータ  $b$ ,  $c$  を図1(a), 図1(b)のように定め、これらに作用する平均せん断応力を  $\tau$  とする。

解析には問題の逆対称性を考慮した適当な単位領域を考え、 $x, y$  両軸に関する応力状態の逆対称条件およびき

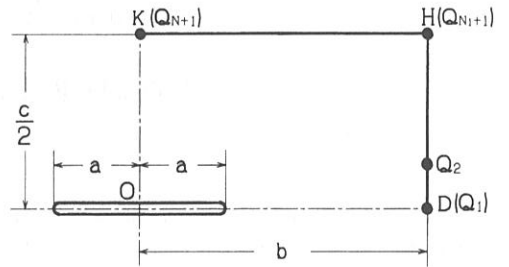


図2 長方形単位領域 (問題(a))

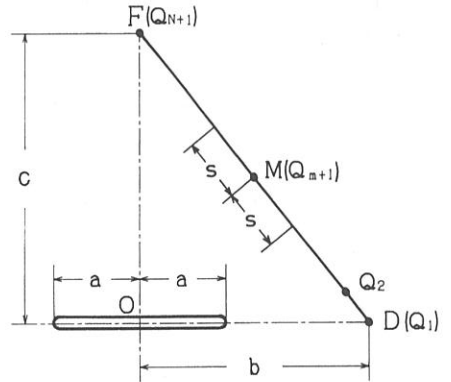


図3 三角形単位領域 (問題(b))

裂縁の境界条件を完全に満たす複素応力関数を導き、その中の未知係数を単位領域外周の境界条件から定める方法をとった<sup>(6)(7)</sup>。この単位領域としては問題(a)では図2の長方形領域 ODHKO を用い、問題(b)では図3の三角形領域 ODFO を用いた。

まずこれらの解析領域に適合する複素応力関数として次の固有関数展開を仮定する。

$$\phi(z) = i \sum_{n=1}^{\infty} (G_n \frac{z^{2n-1}}{\sqrt{z^2 - a^2}} + H_n z^{2n-2})$$

$$\Omega(z) = i \sum_{n=1}^{\infty} (G_n \frac{z^{2n-1}}{\sqrt{z^2 - a^2}} - H_n z^{2n-2}) \dots\dots\dots(4)$$

ここに展開係数  $G_n, H_n$  は実数である。

式(4)は、応力状態が  $x$  軸と  $y$  軸に関して逆対称となる条件、およびき裂  $O$  の縁が自由となる条件を満たしている。数値計算では、次節で述べるように境界条件を有限個の条件に置き換えるので、それに対応して級数(4)も有限項に止めて解析することになる。そして結果の精度は式(4)の項数の増加による値の収束を調べて確認した。

2. 2 単位領域外周の境界条件と未知係数の決定

式(4)の未知係数  $G_n, H_n$  は単位領域の  $x, y$  両軸以外の境界条件から定める。しかし、境界条件を辺上の全ての点で完全に満たすことは不可能なので、合力と変位に基づく境界分割法<sup>(7)(8)(9)(10)(11)</sup>を適用した。両問題の境界条件表示は次のようになる。

(a) 長方形配置き裂群

図2のように長方形領域の辺DHを  $N_1$  個の等区間に辺HKを  $N_2$  個の等区間に分割し、分点を  $Q_j (j=1, 2, \dots, N+1; N=N_1+N_2)$  とすれば、辺DH, HKの境界条件は次のようになる。

辺DHの条件：

応力状態の逆対称性から辺DHに沿って  $\sigma_x$  は零で法線変位  $v$  は一定である。これらは各区間の合力と変位によって次式で置き換えられる。

$$\begin{aligned} [P_x]_j &= 0 \quad (j=1, 2, \dots, N_1) \\ [v]_{j+1} - [v]_j &= 0 \quad (j=1, 2, \dots, N_1-1) \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

ここに  $j$  は区間番号である。 $[P_x]_j$  としては式(5)を式(1)に用い、その虚数部分について点  $Q_{j+1}$  と  $Q_j$  における値の差をとればよく、 $[v]_j$  としては式(5)を式(2)に用い、その虚数部分について点  $Q_{j+1}$  と  $Q_j$  における値の平均値を用いた。すなわち、

$$\begin{aligned} [P_x]_j &= P_{x, Q_{j+1}} - P_{x, Q_j} \\ [v]_j &= (v_{Q_{j+1}} + v_{Q_j})/2 \quad (j=1, 2, \dots, N_1) \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

辺HKの条件：

辺HKに関しても応力状態は逆対称なので、式(5)と類似の次の関係が成り立つ。

$$[P_y]_j = 0 \quad (j=N_1+1, N_1+2, \dots, N)$$

$$[u]_{j+1} - [u]_j = 0 \quad (j=N_1+1, N_1+2, \dots, N-1) \dots\dots\dots(7)$$

ここに  $[P_y]_j, [u]_j$  としては式(6)と同様に

$$\begin{aligned} [P_y]_j &= P_{y, Q_{j+1}} - P_{y, Q_j} \\ [u]_j &= (u_{Q_{j+1}} + u_{Q_j})/2 \quad (j=N_1+1, N_1+2, \dots, N) \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

さらに、この長方形領域に対する外荷重の条件は次式で与えられる。

$$[P_y]_D^H = \tau c, [P_x]_H^K = \tau b \dots\dots\dots(9)$$

以上により境界条件の数は式(5), (7), (9)の  $2N$  個となる。これに対応して式(4)の未知係数としては  $G_n (n \leq N), H_n (n \leq N)$  を残し、これより高次の項を零と置く。そして、境界条件式を解いて  $G_n, H_n$  を定めれば複素応力関数(4)が確定し、必要な物理量を計算することができる。

(b) 千鳥配置き裂群

図3の三角形領域の斜辺DFの中点をMとすると、応力状態の  $x$  方向および  $y$  方向の周期性から、点Mの両側でMから等距離  $s$  にある二点は同じ応力状態であり、また、これらの点Mに対する相対変位も同じである。そこで、斜辺DFを偶数  $N$  個の等しい区間に分割し、分点を  $Q_t (t=1, 2, \dots, N+1; N=2m)$  とする。

まず、点Mから等距離にある分点  $Q_t$  と  $Q_{2m+2-t} (t=1, 2, \dots, m)$  における等応力の条件は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} [P_x]_{Q_t}^{Q_{m+1}} &= [P_x]_{Q_{m+1}}^{Q_{2m+2-t}} \\ [P_y]_{Q_t}^{Q_{m+1}} &= [P_y]_{Q_{m+1}}^{Q_{2m+2-t}} \quad (t=1, 2, \dots, m; m=N/2) \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

また、点Mと点  $Q_t$  の相対変位が点  $Q_{2m+2-t}$  と点Mの相対変位に等しい条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} [u]_{Q_t}^{Q_{m+1}} &= [u]_{Q_{m+1}}^{Q_{2m+2-t}} \\ [v]_{Q_t}^{Q_{m+1}} &= [v]_{Q_{m+1}}^{Q_{2m+2-t}} \quad (t=1, 2, \dots, m; m=N/2) \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

さらに、この三角形領域に対する外荷重の条件は次式で与えられる。

$$[P_y]_D^F = \tau c, [P_x]_D^F = \tau b \dots\dots\dots(12)$$

以上により、 $G_n, H_n$  を定めるための境界条件は式(10), (11), (12)の  $(2N+2)$  個となる。これらに対応して未知係数としては  $G_n (n \leq N+1)$  と  $H_n (n \leq N+1)$  の  $(2N+2)$  個を残してこれより高次の項を零と置く。そして、境界条

件式を解いて  $G_n, H_n$  定めれば複素応力関数(4)が確定し、応力・変位等の必要な物理量を計算することができる。

### 3. 数値計算結果と検討

#### 3.1 計算した物理量と結果の精度

結果の整理にさいしては、必要に応じて次のパラメータを用いた。

$$\gamma = \frac{c}{b}, \mu = \gamma^{-1} = \frac{b}{c}$$

$$\lambda_1 = \frac{a}{b}, \lambda_2 = \frac{a}{c} \dots\dots\dots(13)$$

本研究ではき裂先端の応力拡大係数とき裂群のある弾性体のせん断弾性係数を無次元化した量を求めた。これらは、次式で定義される。

$$\text{無次元応力拡大係数 } F_{II} = \frac{K_{II}}{\tau\sqrt{\pi a}} \dots\dots\dots(14)$$

$$\text{無次元せん断剛性係数 } C = \frac{G^*}{G}$$

$G^*$  = き裂群がある場合の平均せん断弾性係数  
 $G$  = き裂群がない場合のせん断弾性係数 ……(15)

本解析による数値計算結果の精度は、領域外周の分割数を増すときの値の変動を調べることによって推定することができる。表1は、問題(a)では  $c/b=2, a/b=0.8$  の場合について、問題(b)では  $c/b=1, a/b=0.8$  の場合についてそれぞれの問題の単位領域外周の分割数  $N$  を 8, 16, 24, 32 として得た解析値を示したものである。なお、表中の  $G^*/G$  は平面応力でポアソン比  $\nu=0.3$  の場合である。 $F_{II}$  および  $G^*/G$  の値は両問題とも分割数  $N$  の増加で極めて良い収束を示している。以下に述べる解析値はすべて表1のような検討によって十分正しいことを確かめてある。

#### 3.2 数値計算結果

問題(a), (b)について  $a/b, c/b$  の種々の組合せについて計算を行った。 $F_{II}$  の結果は平面応力、平面ひずみに無関係で、ポアソン比  $\nu$  にも依存しない。しかし  $G^*/G$  はこれらに関係するので、平面応力、平面ひずみの両場合で  $\nu$  を 0.3 として計算した。 $F_{II}$  と  $G^*/G$  の結果は図4(a)～図6(b)に示される。図番に付した(a), (b)はそれぞれ長方形配置き裂群, 千鳥配置き裂群を示す。なお  $F_{II}$  の図4(a), (b)の数値をそれぞれ表2(a), (b)に与えてある。

まず  $F_{II}$  の図4(a)～5(b)について述べる。図4(a), (b)は横軸に  $\lambda_1=a/b$  をとり、 $c/b$  をパラメータとして  $F_{II}$  の結果を示したものである。特に  $c/b \rightarrow \infty$  の極限で、両問題の  $F_{II}$  はいずれも一列周期き裂群に対する次の結果に収束する<sup>(2)(3)</sup>。

$$(F_{II})_{c/b \rightarrow \infty} = \left( \frac{2}{\pi \lambda_1} \tan \frac{\pi \lambda_1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(16)$$

しかし  $c/b$  の変動による  $F_{II}$  の変動は両問題でかなり異なる。すなわち問題(a)では、 $c/b$  の減少とともに曲線群は単調に上昇する。問題(b)では、斜め方向のき裂同士の干渉により  $c/b$  が  $\infty$  から減少するとともに曲線群は初め下降し、 $c/b$  が 0.8 付近で傾向が反転して逆に上昇する。

図5(a), (b)は横軸に  $\lambda_2=a/c$  をとり、 $c/b$  をパラメータとして  $F_{II}$  を示したものである。これらの図によれば、図4(a), (b)より  $c/b$  の小さい範囲での  $F_{II}$  の挙動を調べることができる。そして  $c/b \rightarrow 0$  の極限で単列平行き裂群となり、 $F_{II}$  は  $c/b \rightarrow 0$  の曲線<sup>(5)(6)</sup>に収束する。

問題(a)の表2(a)には Delameter らの結果<sup>(4)</sup>を括弧書きしてあるが、本解析結果と  $c/b$  の全範囲で非常に良い一致が認められる。

次にき裂群の存在によるせん断弾性係数の低下を表す無次元せん断剛性係数  $G^*/G$  について述べる。図6(a),

表1 精度の検討例

N	Rectangular array of cracks ( $c/b=2, a/b=0.8$ , square unit region)		Zig-zag array of cracks ( $c/b=1, a/b=0.8$ , triangular unit region)	
	$F_{II}$	$G^*/G$	$F_{II}$	$G^*/G$
8	1.5693	0.6236	1.5298	0.5027
16	1.5696	0.6307	1.5327	0.5027
24	1.5697	0.6310	1.5327	0.5027
32	1.5695	0.6309	1.5328	0.5027

$G^*/G$  : results in plane stress when  $\nu=0.3$ .

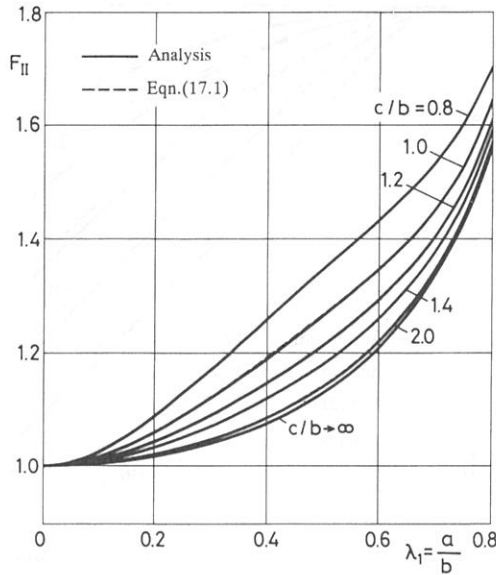


図 4(a)  $F_{II}$  と  $c/b$ ,  $a/b$  の関係 (長方形配置き裂群)

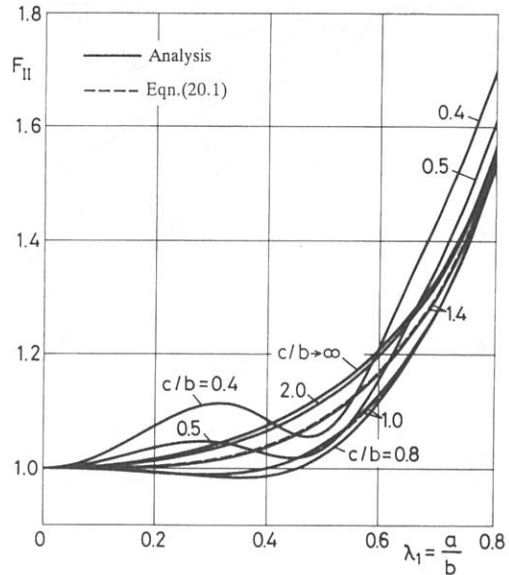


図 4(b)  $F_{II}$  と  $c/b$ ,  $a/b$  の関係 (千鳥配置き裂群)

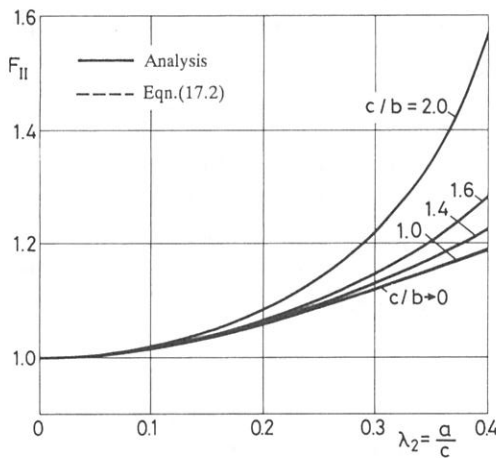


図 5(a)  $F_{II}$  と  $c/b$ ,  $a/c$  の関係 (長方形配置き裂群)

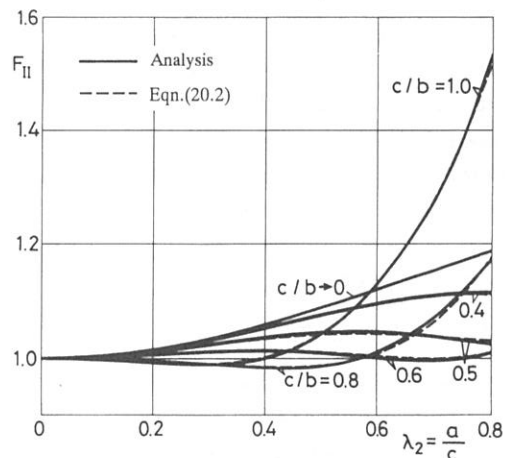


図 5(b)  $F_{II}$  と  $c/b$ ,  $a/c$  の関係 (千鳥配置き裂群)

(b)には、 $\lambda_1$  を横軸にとり  $c/b$  をパラメータとして平面応力 ( $\nu=0.3$ ) と平面ひずみ ( $\nu=0.3$ ) の場合の  $G^*/G$  をそれぞれ太実線と細実線で描いてある。いずれの問題でも  $c/b \rightarrow \infty$  (一列周期き裂群) のときは  $a/b$  に関係なく 1 であり、 $c/b$  の減少とともに曲線は低下する。その低下の度は両問題であまり異ならないが、 $c/b$  が小さくなるに従って長方形配置き裂群の低下の度合いが大きくなる。また、 $G^*/G$  は平面応力より平面ひずみの方がやや大きい。

問題(a)の図 6(a)には Delameter らによる平面応力 ( $\nu=0.3$ ) の場合の  $c/b=2.0$  (正方形配置) と  $c/b=1.0$  の結果<sup>4)</sup> について論文中のグラフから読み取った値を三角印で示してあり、図の全範囲で本解析の平面応力 ( $\nu=0.3$ ) による  $G^*/G$  と良く一致している。

### 3.3 $F_{II}$ , $G^*/G$ の計算式

次に以上の数値計算結果に良く適合する計算式を求めることを考えた。そのさい  $F_{II}$  は、図 4(a)~5(b)の曲線の

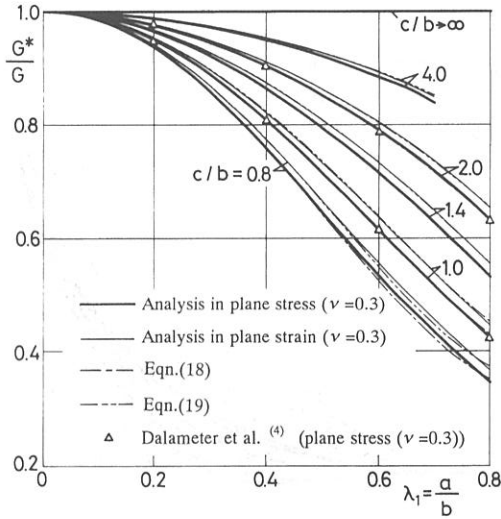


図6(a)  $G^*/G$  と  $c/b$ ,  $a/b$  の関係 (長方形配置き裂群)

傾向を考慮して  $c/b \geq 1$  と  $c/b \leq 1$  の二つの範囲に分けて表した。そして  $c/b \geq 1$  の場合には、 $c/b \rightarrow \infty$  に対応する一列周期き裂群の結果(10)に補正項を加えた形で表すこととし、補正項を  $\mu$ ,  $\lambda_1$  のべき級数として与えた。 $c/b \leq 1$  の場合には、 $\gamma$ ,  $\lambda_2$  のべき級数で表した。また  $G^*/G$  は、 $\mu$ ,  $\lambda_1$  のべき級数で表した。

得られた近似式は次のようになる。なおこれらの諸式の末尾括弧内に示した「平均誤差」は、解析値と式による値の相対誤差 (%) の平均値であり、式の正確さの目安となる。

(a) 長方形配置き裂群

$$(F_{II})_{c/b \geq 1} = \left( \frac{2}{\pi \lambda_1} \tan \frac{\pi \lambda_1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} + \lambda_1^2 \mu [0.194 - 1.864\mu + 4.632\mu^2 - 1.681\mu^3] + \lambda_1 (0.226 - 1.755\mu + 4.394\mu^2 - 3.451\mu^3) + \lambda_1^2 (-1.151 + 10.154\mu - 25.488\mu^2 + 13.567\mu^3) + \lambda_1^3 (0.769 - 6.800\mu + 17.003\mu^2 - 8.661\mu^3) \quad \text{(平均誤差0.1\%)} \quad (17.1)$$

$$(F_{II})_{c/b \leq 1} = 1 + \lambda_2^2 (1.651 + 0.346\gamma - 0.675\gamma^2 + 0.325\gamma^3) + \lambda_2^3 (-0.079 - 2.975\gamma + 5.648\gamma^2 - 2.552\gamma^3) + \lambda_2^4 (-4.780 + 9.138\gamma - 17.631\gamma^2 + 7.893\gamma^3) + \lambda_2^5 (4.964 - 4.830\gamma + 8.020\gamma^2 - 2.180\gamma^3) \quad \text{(平均誤差0.01\%)} \quad (17.2)$$

平面応力 ( $\nu=0.3$ ) について

$$\frac{G^*}{G} = 1 + \lambda_1^2 \mu [-1.211 - 0.008\mu + 0.038\mu^2$$

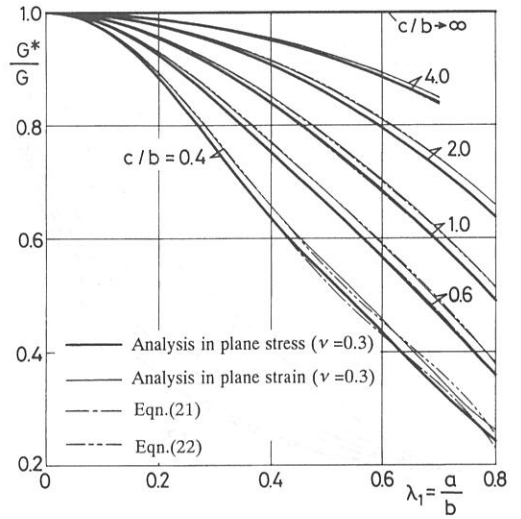


図6(b)  $G^*/G$  と  $c/b$ ,  $a/b$  の関係 (千鳥配置き裂群)

$$+ \lambda_1 (0.004 + 0.294\mu - 0.779\mu^2) + \lambda_1^2 (-0.472 + 1.023\mu + 0.795\mu^2) + \lambda_1^3 (-0.051 + 0.059\mu - 0.369\mu^2) \quad \text{(平均誤差0.2\%)} \quad (18)$$

平面ひずみ ( $\nu=0.3$ ) について

$$\frac{G^*}{G} = 1 + \lambda_1^2 \mu [-1.096 - 0.028\mu + 0.051\mu^2 + \lambda_1 (-0.046 + 0.434\mu - 0.821\mu^2) + \lambda_1^2 (-0.295 + 0.432\mu + 0.891\mu^2) + \lambda_1^3 (-0.179 + 0.361\mu - 0.362\mu^2)] \quad \text{(平均誤差0.2\%)} \quad (19)$$

(b) 千鳥配置き裂群

$$(F_{II})_{c/b \geq 1} = \left( \frac{2}{\pi \lambda_1} \tan \frac{\pi \lambda_1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} + \lambda_1^2 \mu [-0.032 + 1.160\mu - 4.377\mu^2 + 2.618\mu^3] + \lambda_1 (-0.238 + 1.145\mu - 1.000\mu^2 - 0.629\mu^3) + \lambda_1^2 (0.821 - 7.761\mu + 19.800\mu^2 - 9.081\mu^3) + \lambda_1^3 (-0.595 + 5.811\mu - 15.326\mu^2 + 7.654\mu^3) \quad \text{(平均誤差0.1\%)} \quad (20.1)$$

$$(F_{II})_{c/b \leq 1} = 1 + \lambda_2^2 (0.413 + 0.518\gamma - 0.972\gamma^2 - 1.886\gamma^3 + 1.714\gamma^4) + \lambda_2^3 (-0.010 - 10.974\gamma + 53.557\gamma^2 - 80.462\gamma^3 + 37.525\gamma^4) + \lambda_2^4 (-0.299 + 45.296\gamma - 211.98\gamma^2 + 298.75\gamma^3 - 129.15\gamma^4) + \lambda_2^5 (0.155 - 33.094\gamma + 146.09\gamma^2 - 193.07\gamma^3 + 79.220\gamma^4) \quad \text{(平均誤差0.2\%)} \quad (20.2)$$

平面応力 ( $\nu=0.3$ ) について

表 2(a) 無次元応力拡大係数  $F_{II}$  (長方形配置き裂群)

$a/b$	$c/b$							
	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	$\infty$
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	1.025	1.016	1.011	1.008	1.007	1.006	1.005	1.004
0.2	1.088 (1.0881)	1.059	1.043 (1.0429)	1.033	1.027 (1.0267)	1.023	1.020 (1.0205)	1.017 (1.0170)
0.3	1.170	1.120	1.090	1.071	1.059	1.051	1.047	1.040
0.4	1.258 (1.2577)	1.189	1.146	1.119	1.102 (1.1022)	1.092	1.085	1.075 (1.0753)
0.5	1.345	1.263	1.212	1.180	1.160	1.147	1.140	1.128
0.6	1.433	1.345	1.292 (1.2918)	1.259	1.239	1.227	1.219	1.208 (1.2085)
0.7	1.535	1.452	1.405	1.377	1.361	1.351	1.345	1.336
0.8	1.703 (1.7028)	1.642	1.609	1.591	1.581 (1.5805)	1.574	1.570	1.565 (1.5650)

( ) : Delameter et al.<sup>(4)</sup>.

表 2(b) 無次元応力拡大係数  $F_{II}$  (千鳥配置き裂群)

$a/b$	$c/b$										
	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	$\infty$
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	1.023	1.012	1.005	0.999	0.998	0.999	1.000	1.002	1.003	1.003	1.004
0.2	1.075	1.036	1.013	0.993	0.992	0.998	1.003	1.008	1.011	1.014	1.017
0.3	1.112	1.046	1.010	0.985	0.990	1.002	1.013	1.023	1.029	1.033	1.040
0.4	1.085	1.025	0.997	0.987	1.001	1.020	1.037	1.051	1.060	1.066	1.075
0.5	1.062	1.034	1.021	1.023	1.042	1.065	1.085	1.100	1.111	1.117	1.128
0.6	1.211	1.158	1.130	1.117	1.129	1.149	1.167	1.181	1.191	1.198	1.208
0.7	1.442	1.359	1.312	1.277	1.278	1.290	1.304	1.315	1.322	1.328	1.336
0.8	1.69	1.61	1.573	1.538	1.533	1.538	1.545	1.552	1.557	1.560	1.565

$$\begin{aligned} \frac{G^*}{G} = & 1 + \lambda_1^2 \mu [ -1.204 - 0.026\mu + 0.034\mu^2 - 0.006\mu^3 \\ & + \lambda_1(-0.234 + 0.877\mu - 0.982\mu^2 + 0.189\mu^3) \\ & + \lambda_2^2(-0.395 + 0.757\mu + 3.379\mu^2 - 0.979\mu^3) \\ & + \lambda_3^2(-0.015 + 1.280\mu - 6.829\mu^2 + 2.028\mu^3) \\ & + \lambda_4^2(-0.143 - 0.854\mu + 3.476\mu^2 - 1.094\mu^3) ] \\ & \text{(平均誤差0.2\%)} \dots\dots\dots(21) \end{aligned}$$

平面ひずみ ( $\nu=0.3$ ) について

$$\begin{aligned} \frac{G^*}{G} = & 1 + \lambda_1^2 \mu [ -1.097 - 0.022\mu + 0.030\mu^2 - 0.005\mu^3 \\ & + \lambda_1(-0.220 + 0.845\mu - 0.945\mu^2 + 0.185\mu^3) \\ & + \lambda_2^2(-0.341 + 0.338\mu + 3.324\mu^2 - 0.967\mu^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \lambda_3^2(0.064 + 1.313\mu - 6.302\mu^2 + 1.918\mu^3) \\ & + \lambda_4^2(-0.337 - 0.486\mu + 2.969\mu^2 - 0.989\mu^3) ] \\ & \text{(平均誤差0.2\%)} \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

$F_{II}$ の図 4(a)~図 5(b)には式(17)と(20)による値を破線で示してある。また、 $G^*/G$ の図 6(a), 図 6(b)には、平面応力( $\nu=0.3$ )の場合の式(18), (21)および平面ひずみ( $\nu=0.3$ )の場合の式(19), (22)による結果をそれぞれ一点鎖線と二点鎖線で示してある。いずれの計算式による結果も解析値と極めて良い近似を与えることがわかる。

#### 4. 結 論

(1) 長方形配置および千鳥配置のき裂群をもつ無限体

の面内せん断について、適当な単位領域を考え、合力と変位による境界条件を用いて精度良く解析した。き裂の大きさおよび横方向と縦方向の間隔の種々の組合せについて数値計算を行い、無次元応力拡大係数  $F_{II}$  およびき裂群をもつ弾性体のせん断弾性係数  $G^*$  を求めた。

(2) 無次元応力拡大係数  $F_{II}$  は、き裂群がき裂面と直角方向に密になるに従って、長方形配置き裂群の場合では単調に増大するが、千鳥配置き裂群では斜め方向のき裂同士の間隔により初め減少し、 $c/b$  が0.8付近で傾向が反転して逆に増大する。

(3) き裂群をもつ弾性体と母材のせん断弾性係数の比  $G^*/G$  は、長方形配置き裂群および千鳥配置き裂群のいずれの場合もき裂が密になるに従って減少し、き裂密度が同じ場合、 $G^*/G$  は千鳥配置き裂群より長方形配置き裂群の方が小さくなる。また、 $G^*/G$  は平面応力より平面ひずみの方がやや大きい。

(4)  $F_{II}$  と  $G^*/G$  の解析値に良く適合する計算式をべき級数の形で与えて、パラメータの任意の組合せに対する結果が精度良く求められるようにした。

#### 参考文献

- (1) Murakami, Y., editor-in-chief, Stress Intensity Factors Handbook (1986), Pergamon Press.
- (2) 石田誠, き裂の弾性解析と応力拡大係数, (1976), 培風館.
- (3) Westergaard, H. M., Trans. ASME, J. Appl. Mech., **66**(1939), A49.
- (4) Delameter, W. R., Herrmann, G. and Barnett, D. H., Trans. ASME, J. Appl. Mech., **42**, (1975), 74.
- (5) Isida, M., Mechanics of Fracture 1, ed. Sih, G. C., Noordhoff Int. Pub., (1973), 56.
- (6) 石田・向野, 日本機械学会論文集, **48-428**, A(1982), 423.
- (7) Isida, M., Int. J. Frac. Mech., **7**(1971), 301.
- (8) Isida, M., Proc. 1971 Int. Conf. Mech. Behav. Mater., **1**(1972), 394.
- (9) 石田・寺田, 日本機械学会論文集, **43-374** (1977), 3636.
- (10) 石田・牛島・岸根, 日本機械学会論文集, **47-413** (1981), 27.
- (11) 石田・井川, 日本機械学会論文集, **55-510**, A(1989), 238.