

閾値機構をもつ或るシステムについて

藤野 精一*

On a System with Threshold Structure

Seiichi FUJINO

Abstract

In this paper we shall define a system with threshold structure and study its characteristics. Some examples of such a system will be presented. We shall show a theorem about length of limit cycle in a behavior diagram of the system under some conditions.

1. はじめに

閾値機構をもつオートマトンについては以前に著者と北川が研究した結果がある¹⁾。その際得られた結果は神経方程式の解の挙動に関する北川の結論²⁾をオートマトンの立場から再確認することになり、同時に初等整数論の定理を2, 3援用することにより北川の証明を簡素化し、さらに新しい知見を提供することも可能にした。そのとき新しく定義したオートマトンはいわば過去の状態の記憶が或る一定段階まで残存しその段階以前の記憶は次から次へと完全消滅するような機構をもつオートマトンと解釈されるものであった。

それに対してこの論文では過去の状態の記憶をいつまでも引きずってこれら記憶の影響が現在の状態を左右し、また、それらの状態のすべての履歴によつて次の状態が定まるようなオートマトンを考える。以下このようなオートマトンの定式化とそれから得られる2, 3の結果を述べる。

2. 定義とシステムの例

まず一つのシステムを定義しよう。 $\mathbf{a}=(a_i)_{i=1,2,\dots}$ を $\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|<\infty$ なる実数列、 θ を実数とする。 B^∞ を集合 $B=[0, 1]$ の要素を成分とする無限数列 $\mathbf{b}=(b_i)_{i=1,2,\dots}$ の全体とし、 B^∞ から B^∞ の写像 τ を各 $\mathbf{b}=(b_i)_{i=1,2,\dots}$ に対して

$$\tau(\mathbf{b}) := (1(\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i - \theta), b_1, b_2, \dots)$$

で定義する。関数 1 は

$$1(u) := \begin{cases} 1 & (u \geq 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (u < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義される関数である。

このとき B^∞ と τ から構成されるシステム $A := \langle B^\infty, \tau \rangle$ を閾値機構パラメータ (\mathbf{a}, θ) をもつシステムという。いわば0, 1で表現される認識記憶を持つ閾値機構オートマトンである。

次の記法を導入しよう。

$\mathbf{b}=(b_i) \in B^\infty$ に対して、数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}$$

を対応させる写像を ψ とする。 ψ は B^∞ から $[0, 1]$ の上への写像である。また、 $\mathbf{b} \in B^\infty$ に対して $\Psi(\mathbf{b})$ を p と書くとき、

$$t(p) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$$

で、 $[0, 1]$ から R への写像 t を定義する。さらに、 $p \in [0, 1]$ に対して p^* を

$$p^* := 1 - p$$

で定義する。

このとき、次の関係を得る。

- (1) $(p^*)^* = p$,
- (2) $p + p^* = 1$
- (3) $t(p) + t(p^*) = t(0^*)$.

また、 $t(0) = 0$, $t(0^*) = t(1) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ である。この記法を使用すると、

* 教養部

平成9年9月11日受理

$b=(b_i) \in B^\infty$ に対して
 $\tau(b)=(1(t(p)-\theta), b_1, b_2, \dots)$
 と書ける。

そこで $f = \psi \circ \tau \circ \psi^{-1}$ とすると $[0, 1]$ から $[0, 1]$ の中への関数 f が定義される。この f は $[0, 1]$ と組み合わせて力学系 $D := \langle [0, 1], f \rangle$ を構成する。 D はオートマトン $A := \langle B^\infty, \tau \rangle$ の挙動を表現する力学系である。 D をオートマトン A に付随する力学系という。

以上をまとめると次の可換図式が考えられる (図-1)。

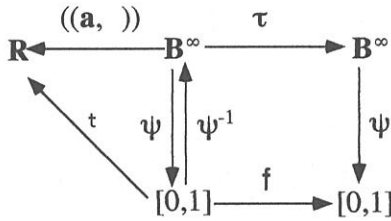


図-1 オートマトンAとそれに付随する力学系

$((a,))$ は B^∞ から R への写像で、各 $b=(b_i) \in B^\infty$ に対して

$$((a, b)) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$$

である。

例 2. 1.

$a_i = \frac{1}{2^{i-1}}$ ($i=1, 2, \dots$), $0 < \theta < 1$ なる a, θ を与える。こ

のとき $\psi(b) = p$ とすると

$$\begin{aligned} t(p) &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^{i-1}} \\ &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i} \\ &= 2p \end{aligned}$$

従って、 $2p \geq \theta$, すなわち、 $p \geq \frac{\theta}{2}$ のとき

$$1(t(p) - \theta) = 1$$

$2p < \theta$, すなわち、 $p < \frac{\theta}{2}$ のとき

$$1(t(p) - \theta) = 0,$$

となるので

$$\tau(b) = \begin{cases} (1, b_1, b_2, \dots) & (\frac{\theta}{2} \leq p \leq 1) \\ (0, b_1, b_2, \dots) & (0 \leq p < \frac{\theta}{2}) \end{cases}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} f(p) &= \psi(\tau(\psi^{-1}(p))), \\ &= \psi(\tau(b)), \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{b_1}{2^2} + \frac{b_2}{2^3} + \dots & (\frac{\theta}{2} \leq p \leq 1), \\ \frac{b_1}{2^2} + \frac{b_2}{2^3} + \dots & (0 \leq p < \frac{\theta}{2}), \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{p}{2} & (\frac{\theta}{2} \leq p \leq 1), \\ \frac{p}{2} & (0 \leq p < \frac{\theta}{2}), \end{cases} \end{aligned}$$

すなわち、

$$f(p) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{p}{2} & (\frac{\theta}{2} \leq p \leq 1), \\ \frac{p}{2} & (0 \leq p < \frac{\theta}{2}). \end{cases}$$

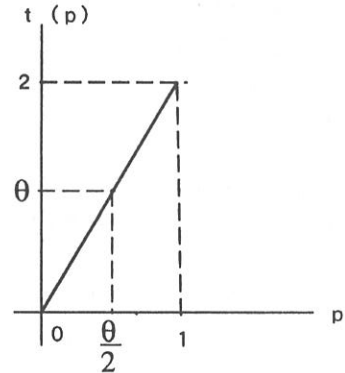


図-2 例 2. 1 の $t(p)$

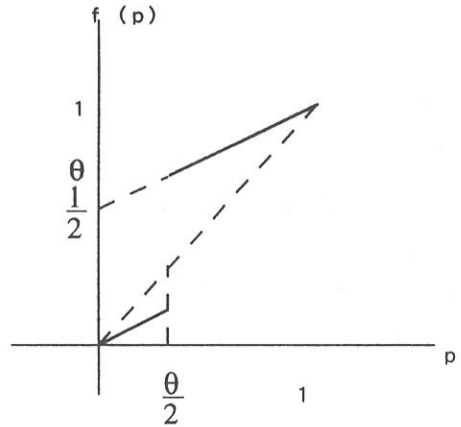


図-3 例 2. 1 の $f(p)$

$t(p), f(p)$ のグラフは、それぞれ、図-2, 図-3 のようになる。

3. 閾値オートマトンの特性

そのようなシステムについて次の結果を得た。

定理 3. 1. (a, θ) を閾値パラメータとするシステム $A = \langle B^\infty, \tau \rangle$ に付随する力学系 $D = \langle [0, 1], f \rangle$ において f は次の値をとる関数である。

$$f(p) = \frac{1}{2}(p + 1(t(p) - \theta)), p \in [0, 1]$$

証明. $p \in [0, 1]$ を任意にとるとき、 $\psi(b) = p$ なる $b = (b_i) \in B^\infty$ が一意に定まる。

$$p = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}$$

である。このとき

$$\begin{aligned} f(p) &= \psi \cdot \tau \cdot \psi^{-1}(p), \\ &= \psi(\tau(b)), \\ &= \psi(1(t(p) - \theta), b_1, b_2, \dots), \\ &= \frac{1}{2}(1(t(p) - \theta)) + \frac{b_1}{2^2} + \frac{b_2}{2^3} + \dots, \\ &= \frac{1}{2}(1(t(p) - \theta)) + \frac{1}{2}p \end{aligned}$$

である。

(証終)

定理 3. 2. $a = (a_i)$ を $a_i = \frac{1}{2^{i-1}} (i=1, 2, \dots)$ と選び、 θ を $0 < \theta < 1$ とする。このとき、閾値オートマトン $A = \langle B^\infty, \tau \rangle$ に付随する力学系 $D = \langle [0, 1], f \rangle$ において次のことが成立する。

(1) $0 \leq p < \frac{\theta}{2}$ のとき、数列 $\{f^n(p)\}_{n=0,1,2,\dots}$ は単調減少

し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(p) = 0,$$

(2) $\frac{\theta}{2} \leq p \leq 1$ のとき、数列 $\{f^n(p)\}_{n=0,1,2,\dots}$ は単調増加

し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(p) = 1,$$

である。

証明 図-3 より明らかである。

(証終)

いま $b = (b_i) \in B^\infty$ に対して

$$\bar{b} := (\bar{b}_i), \bar{b}_i = \begin{cases} 1 & (b_i = 0) \\ 0 & (b_i = 1) \end{cases}$$

で $\bar{b} \in B^\infty$ を定義しよう。

$$\psi(\bar{b}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1-b_i)}{2^i} = 1 - p = p^*$$

である。

定理 3. 3. (a, θ) を閾値パラメータとするシステム $A = \langle B^\infty, \tau \rangle$ に付随する力学系 $D = \langle [0, 1], f \rangle$ において、 p と θ との関係が

$$\min\{t(p), 1-t(p)\} < \theta < \max\{t(p), 1-t(p)\}$$

なる p では

$$f(p^*) = (f(p))^*$$

である。

証明 $t(p) + t(p^*) = t(1)$ であるから

$$\begin{aligned} (t(p) - \theta)(t(p^*) - \theta) \\ = (t(p) - \theta)(t(1) - t(p) - \theta) \end{aligned}$$

である。よつて p が定理の仮定をみたすならば

$$(t(p) - \theta)(t(p^*) - \theta) < 0$$

すなわち、

$$1(t(p) - \theta) + 1(t(p^*) - \theta) = 1$$

である。よつて定理 3. 1. より

$$\begin{aligned} f(p^*) &= \frac{1}{2}(p^* + 1(t(p^*) - \theta)) \\ &= \frac{1}{2}(1 - p + 1 - 1(t(p) - \theta)) \\ &= 1 - \frac{1}{2}(p + 1(t(p) - \theta)) \\ &= 1 - f(p) \\ &= (f(p))^* \end{aligned}$$

(証終)

例 3. 1. $a_i = \frac{1}{2^i} (i=1, 2, \dots)$ なる $a = (a_i)$ をとる。

$t(p) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i} = p$ であるから、このとき関数 t は連続である。

例 3. 2. $a_i \neq 0 (i=1, 2, \dots, m), a_i = 0 (i=m+1, m+2, \dots)$ なる $a = (a_i)$ をとると、

$$t(p) = \sum_{i=1}^m a_i b_i (p = \psi(b) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}) \cdot$$

いま $h = \frac{1}{2^m}$ とすると、 $ih \leq p < (i+1)h$ なる p では

$$t(p) = t(ih) (i=0, 1, 2, \dots, 2^m - 1)$$

実際、 $i = \sum_{j=1}^m i_j 2^{m-j}, i_j \in B$ と 2 進展開すると、

$$t(ih) = t\left(\sum_{j=1}^m \frac{i_j}{2^j}\right) = \sum_{j=1}^m a_j i_j$$

p は $ih \leq p < (i+1)h$ の範囲内に入るから、 $p = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}$ において $b_j = i_j (j=1, 2, \dots, m)$ である。よつて、

$$t(p) = \sum_{j=1}^m a_j i_j = t(ih)$$

である。従つて、 t は $[0, 1]$ 上の階段関数となり、区分的

に連続である。

$$t(0)=0,$$

$$t(h)=a_m,$$

$$t(2h)=t\left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)=a_{m-1},$$

$$t(3h)=t\left(\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^m}\right)=a_{m-1}+a_m,$$

⋮

$$t(2^m h)=t(1)=\sum_{i=1}^m a_i$$

であるから、 $t(p)$ のグラフは図-4 のようになる。

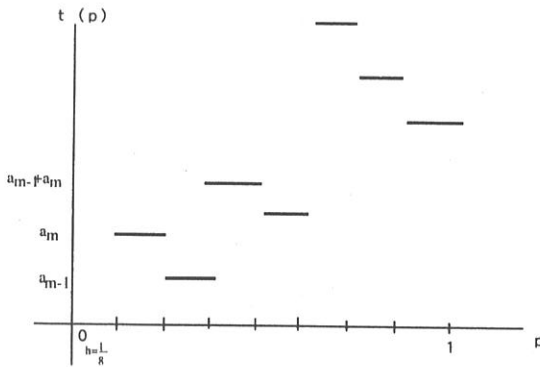


図-4 (m=3) の場合の $t(p)$ の例

特に $a_i = \frac{1}{2^i}$ ($i=1, 2, \dots, m$), 他の a_i は 0 とすると $ih \leq p < (i+1)h$ なる p では

$$t(p) = ih \text{ となり, かつ}$$

$$t(0) = 0 < t(h) < t(2h) < \dots < t(1)$$

である (図-5)。このとき $\theta = \frac{1}{2}$ ととると $f(p)$ は図-6 のようになる。

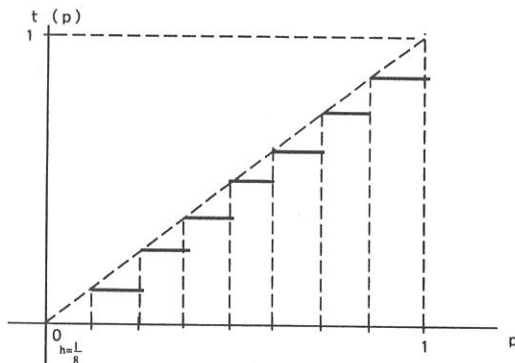


図-5 (m=3) の場合の $t(p)$ の例 (2)

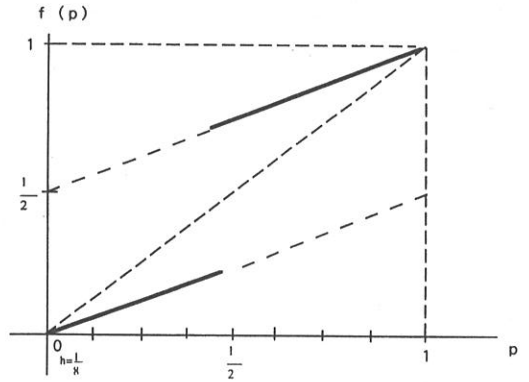


図-6 (m=3) の場合の $f(p)$

例 3. 3.

$a_2 > a_3 > \dots > a_1 > \dots \rightarrow 0$ で, $a_1 = (\frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} a_i)$ ととり, $\theta = -\frac{1}{2}$ とする。

このとき, $p \in [0, 1]$ に対して $\psi(b) = p, b = (b_i) \in B^\infty$ なる b をとると

$$t(p) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$$

である。

$p \in [0, \frac{1}{2}]$ のとき, そのときにかぎり, $b_1 = 0$ であり,

$p \in [\frac{1}{2}, 1]$ のとき, そのときにかぎり, $b_1 = 1$ であるから, $p \in [0, \frac{1}{2}]$ のとき,

$$t(p) = \sum_{i=2}^{\infty} a_i b_i \geq 0 > -\frac{1}{2} = \theta,$$

かつ, $p \in [\frac{1}{2}, 1]$ のとき

$$\begin{aligned} t(p) &= a_1 + \sum_{i=2}^{\infty} a_i b_i \\ &= -\frac{1}{2} - \sum_{i=2}^{\infty} a_i + \sum_{i=2}^{\infty} a_i b_i \\ &= -\frac{1}{2} - \sum_{i=2}^{\infty} a_i (1 - b_i) \\ &\leq -\frac{1}{2} = \theta \end{aligned}$$

である。よつて,

$$f(p) = \begin{cases} \frac{1}{2}(p+1) & (p \in [0, \frac{1}{2}]) \\ \frac{1}{2}p & (p \in [\frac{1}{2}, 1]) \end{cases}$$

である (図-7)。

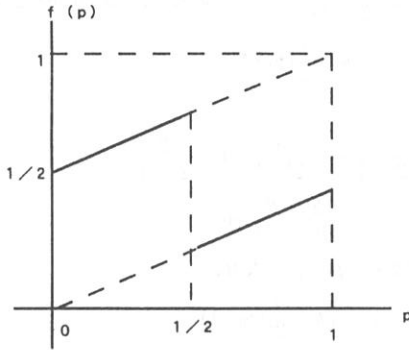


図-7 例3.3の $f(p)$

このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n+1}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3},$$

である。同様に計算して、 $p \in [0, \frac{1}{2}]$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(p) = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n+1}(p) = \frac{2}{3},$$

$p \in [\frac{1}{2}, 1]$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n}(p) = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{2n+1}(p) = \frac{1}{3},$$

を得る。また、 $f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}, f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$ である。この f は周期2のサイクルをその挙動の一例として含んでいる。

例3.4. $a_1 = -1$, 他の a_i はすべて0, $\theta = \frac{1}{2}$ とすると

$$t(p) = a_1 b_1 = -b_1,$$

従って,

$$t(p) - \theta = -b_1 - \frac{1}{2} < 0$$

よって,

$$f(p) = \frac{1}{2}p, p \in [0, 1].$$

このときは任意の $p \in [0, 1]$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(p) = 0$$

である (図-8)。

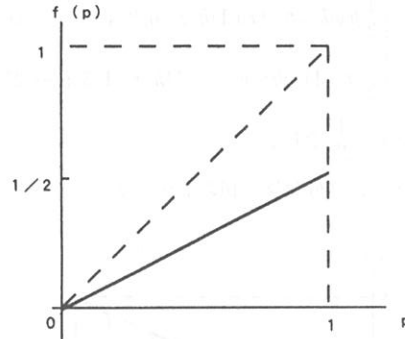


図-8 例3.4の $f(p)$

例3.5. $a_1 = 1$, 他の a_i はすべて0, $\theta = -\frac{1}{2}$ とすると

$$t(p) - \theta = b_1 + \frac{1}{2} > 0$$

となり, 任意の $p \in [0, 1]$ に対して

$$f(p) = \frac{1}{2}(p+1)$$

である。このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(p) = 1$ である (図-9)。

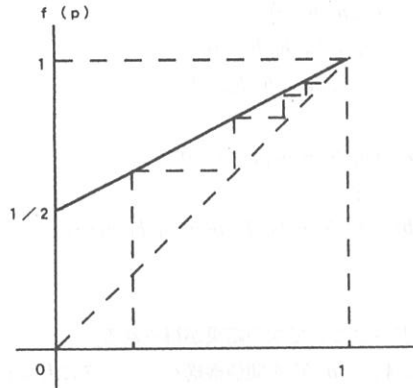


図-9 例3.5の $f(p)$

例3.6. $a_m = 1$, 他のすべての a_i は0, $\theta = \frac{1}{2}$ とすると,

$t(p) = b_m$ であり,

$$t(p) - \theta = b_m - \frac{1}{2} \begin{cases} < 0 (b_m = 0), \\ > 0 (b_m = 1) \end{cases}$$

すなわち,

$$f(p) = \begin{cases} \frac{1}{2}p & (ih \leq p < (i+1)h, i=0, 2, 4, \dots, 2^m-2) \\ \frac{1}{2}(p+1) & (ih \leq p < (i+1)h, i=1, 3, 5, \dots, 2^m-1) \end{cases}$$

但し, $h = \frac{1}{2^m}$ である。

このとき, $f(p)$ は図-10 のようになる。

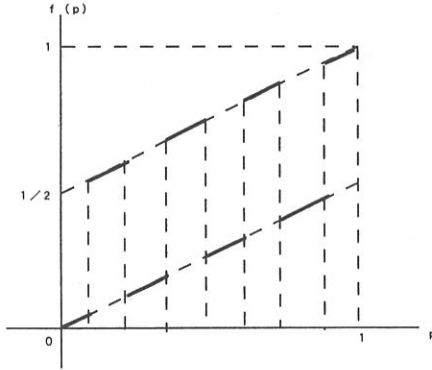


図-10 例3.6の $f(p)$ ($m=3$)

このとき $1(t(p)-\theta) = b_m$ である。よって,

$$\tau(\mathbf{b}) = (b_m, b_1, b_2, \dots)$$

$$\tau^2(\mathbf{b}) = (b_{m-1}, b_m, b_1, b_2, \dots)$$

$$\tau^3(\mathbf{b}) = (b_{m-2}, b_{m-1}, b_1, b_2, \dots)$$

⋮

$$\tau^m(\mathbf{b}) = (b_1, b_2, \dots, b_m, b_1, b_2, \dots)$$

⋮

$$\tau^{2m}(\mathbf{b}) = (b_1, b_2, \dots, b_m, b_1, b_2, \dots, b_m, b_1, b_2, \dots)$$

⋮

である。

挙動の長さについて次の結果が得られる。

定理 3.4. (α, θ) を閾値機構パラメータにもつシステム $A = \langle B^\infty, \tau \rangle$ に付随する力学系 $D = \langle [0, 1], f \rangle$ において, 関数 f が

$$f(p) = \begin{cases} \frac{1}{2}(p+1) & (p \in [0, \hat{p}]), \\ \frac{1}{2}p & (p \in [\hat{p}, 1]) \end{cases}$$

となるような \hat{p} が存在し, さらにこの \hat{p} に対して

$$\frac{1}{2^L-1} < \hat{p} < \frac{2}{2^L-1}$$

となる2以上の整数 L がとれるとき, システム A の挙動図は長さ L のサイクルを持つ, 即ち, 適当な p があつ

て, $f^L(p) = p, f^i(p) \neq p (i=1, 2, \dots, L-1)$ である。

証明. $p_0 = \frac{1}{2^L-1}$ ととる。このとき, $p_0 \in [0, \hat{p}]$ であるか

ら, $p_1 = f(p_0) = \frac{1}{2}(p_0+1)$ 。

また,

$$\begin{aligned} p_1 - \frac{2}{2^L-1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^L-1} + 1 \right) - \frac{2}{2^L-1} \\ &= \frac{2^L - 2^2}{2(2^L-1)} \geq 0 \end{aligned}$$

であるから, $p_1 > \hat{p}$ となり,

$$p_2 = f(p_1) = \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2^2}(p_0+1)$$

である。これを $p_3 = f(p_2), p_4 = f(p_3), \dots$ と続けていくと, $i < L$ なる i について

$$p_i > \hat{p} (i=1, 2, \dots, L-1)$$

となり,

$$p_i = f(p_{i-1}) = \frac{1}{2}p_{i-1} = \dots = \frac{1}{2^i}(p_0+1)$$

したがって,

$$p_{L-1} = \frac{1}{2^{L-1}}(p_0+1)$$

である。よって,

$$\begin{aligned} p_{L-1} &= \frac{1}{2^{L-1}} \left(\frac{1}{2^L-1} + 1 \right) \\ &= \frac{2}{2^L-1} \end{aligned}$$

である。このとき,

$$p_L = f(p_{L-1}) = \frac{1}{2}p_{L-1} = \frac{1}{2^L-1}$$

となり, $p_L = p_0$ かつ, $p_i \neq p_0 (i=1, 2, \dots, L-1)$ で, 長さ L のサイクルの存在が確定する。 (証終)

例 3.7. $L=3$ とする。 $\frac{1}{2^L-1} = \frac{1}{7}$ であるから, $\frac{1}{7} <$

$\hat{p} < \frac{2}{7}$ となるような \hat{p} で $f(p)$ のグラフの形が定理に示された形になっていれば

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} + 1 \right) = \frac{4}{7},$$

$$f\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{7},$$

$$f\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{7}$$

となり, 長さ3のサイクルの存在が分かる。

また $L=4$ のとき, $\frac{1}{2^4-1} = \frac{1}{15} < \hat{p} < \frac{2}{15}$ となる \hat{p} で $f(p)$ の形が決定していれば,

$$f\left(\frac{1}{15}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{15} + 1\right) = \frac{8}{15},$$

$$f\left(\frac{8}{15}\right) = \frac{14}{15},$$

$$f\left(\frac{14}{15}\right) = \frac{2}{15}$$

$$f\left(\frac{2}{15}\right) = \frac{1}{15}$$

となり、長さ4のサイクルの存在が確かめられる。

参考文献

[1] 藤野精一, 北川敏男: 閾値機構を持つオートマト

ンの挙動解析, 日本数学会秋季総合分科会応用数学分科会講演予稿集 (1989), 181-184.

[2] T. Kitagawa: Dynamical Systems and Operators associated with a Single Neuronic Equation, Math. Biosci. 18(1973), 191-244.

[3] F. F. Soulie, Y. Robert and M. Tchente: Automata networks in computer science, Theory and Applications, (1987), 264pp.