

## 境界要素法を援用した光弾性主応力解析

井川 秀信\*・林 佳彦\*・平野 貞三\*

## Photoelastic Analysis of Principal Stresses Using Boundary Element Method

Hidenobu IGAWA, Yoshiko HAYASHI and Teizo HIRANO

## Abstract

This paper is concerned with an effective method to obtain the principal stresses throughout the whole interior region of a two-dimensionally stressed photoelastic model. We compute the interior distribution of the sum of the principal stresses over the photoelastic model by using the boundary element method based on Laplace's differential equation, and carry out the separation of the principal stresses by combining this sum with the principal stress-difference obtained from the photoelastic stress pattern. This method is a brief and accurate technique to separate the principal stresses.

Key words: Photoelasticity, Stress Analysis, Separation of Principal Stresses, Boundary Element Method

## 1. 緒 言

光弾性実験法は、承知のごとく領域内の応力状態を視覚的にとらえることができるなどの多くの利点を有しているため、あらゆる工学分野での実験的応力解析法として実用化されてきた<sup>(1),(2)</sup>。

二次元光弾性法では、光弾性等色線の縞次数によって主応力差  $\sigma_1 - \sigma_2$  の分布を求めることができる。特に自由境界では  $\sigma_1$  および  $\sigma_2$  のいずれか一方が零となり、これによって  $\sigma_1$  あるいは  $\sigma_2$  が求まる。しかし材料内部では一般に  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 \neq 0$  であり、等色線からでは材料内部の主応力を簡単に分離することはできない。

そこで本研究では、これらの難点を克服するために、領域外周の境界条件から領域内部の主応力とを求められることができるラプラス方程式に基づく境界要素法解析に注目し、これらによる主応力との結果と光弾性法による主応力差の結果を組合せて材料内部の主応力を簡単に分離することを試みた。

本法の適用例として、片側に半円切欠きをもつ帯板の一樣曲げ試験を行い、材料内部の各主応力の分布を調べ

る。また同一モデルを有限要素法で解析し、本法と有限要素法による結果の比較を行って精度を確認する。

## 2. 実験方法

実験に使用した材料は、厚さ 6 [mm] の熱硬化型エポキシ平板 (光弾性感度  $\alpha = 0.9112 \times 10^{-1}$  [mm/N]) である。これをフライス盤により Fig. 1 に示した片側半円切欠き帯板に加工した。なお加工の際、切削熱によるエポキシ樹脂の縁効果の影響を極力押さえるために冷却剤として灯油を用い、これによる強制噴霧を行った。

次に 4 点荷重法による一樣曲げ試験を行い、Fig. 2 に示した PA-300 型光弾性実験装置を用いて光弾性縞の撮影を行った。なお光弾性縞は CCD カメラ (ソニー製 VX-1000) によって撮影した。実験で得られた光弾性縞画像は計算機上でデジタル処理を行い、以下に述べる応力解

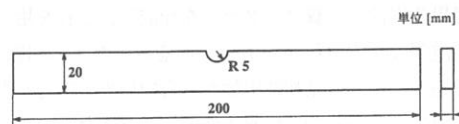


Fig. 1 片側半円切欠きをもつ帯板試験片

\* 機械工学科

平成 9 年 9 月 11 日 受理

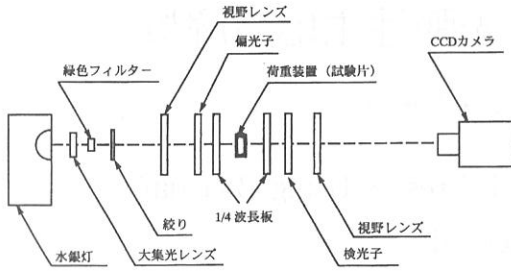


Fig. 2 光弾性実験装置

析を行った。

### 3. 解析方法

#### 3. 1 光弾性法による応力解析<sup>(3)</sup>

二次元光弾性法では、Fig. 2 に示した直交偏光子間に 2 個の1/4波長板を入れた場合で試験片を荷重し、単色光を透過すると明暗の等色線縞が得られる。この縞次数  $N$  を測定することにより主応力差  $\sigma_1 - \sigma_2$  を求めることができる。すなわち

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N}{ad} \quad (1)$$

ここに  $a$  は光弾性感度であり、 $d$  は材料の板厚である。

特に自由境界では主応力  $\sigma_1, \sigma_2$  のいずれか一方が零であるから、 $\sigma_1 - \sigma_2$  より直ちに主応力  $\sigma_1$  あるいは  $\sigma_2$  を求めることができる。

#### 3. 2 境界要素法を援用した主応力分離法

前節で述べたように、光弾性法では主応力差  $\sigma_1 - \sigma_2$  が等色線より得られるので、何らかの方法で主応力和  $\sigma_1 + \sigma_2$  が得られれば、領域内部の応力が分離できることになる。本節では、境界要素法を援用した光弾性法による主応力分離について述べる。

等方均一な 2 次元連続体において、物体力の影響が無視できる場合には、主応力和  $\sigma_1 + \sigma_2$  は次のラプラス方程式を満足する。

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_1 + \sigma_2) = 0 \quad (2)$$

そしてこの問題を定式化したプレビアの著書<sup>(4)</sup>に従って境界要素法の計算プログラムを作成し、これを用いて材料内部の主応力和  $\sigma_1 + \sigma_2$  の分布を求めた。その際、前節で述べたように光弾性実験から自由境界の応力が得られるのでこれを式(2)の境界条件として与えた。

以上によって材料内部の主応力和  $\sigma_1 + \sigma_2$  が求まり、これと光弾性法から得られる主応力差  $\sigma_1 - \sigma_2$  から材料内

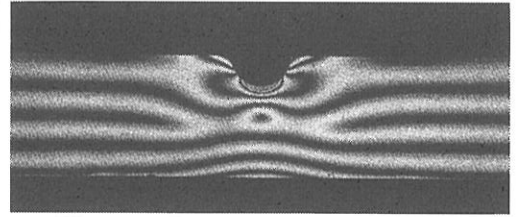


Fig. 3 片側半円切欠き帯板の等色線写真 (一様曲げモーメント状態)

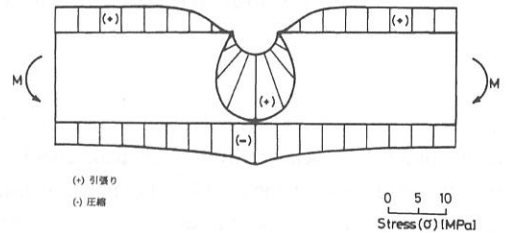


Fig. 4 切欠き部を含む自由境界の応力分布

部の主応力  $\sigma_1$  および  $\sigma_2$  を分離することが可能になる。

### 4. 実験結果と考察

#### 4. 1 切欠き部周辺の応力分布

Fig. 3 は、四点曲げを受ける片側半円切欠きの光弾性写真を示したものである。そして縞次数  $N$  の分布から求めた自由境界周辺の応力分布を Fig. 4 に示す。なお、図中の記号 (+) は引張応力を表し、(-) は圧縮応力を表している。

Fig. 5 は切欠き底周辺の接線応力  $\sigma_\theta / \sigma_n$  の分布を詳細に示したものである。なお  $\sigma_n$  は切欠き底の位置に相当す

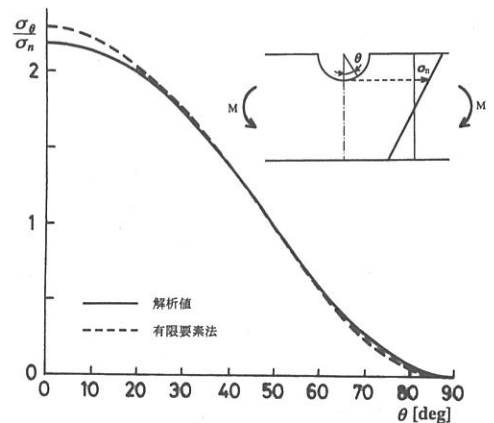


Fig. 5 切欠き部周上の応力分布  $\sigma_\theta / \sigma_n$

る一様曲げモーメントを受ける平滑帯板試験片の応力である。また本実験による結果の精度を確認するため、同一モデルを有限要素法<sup>(6)</sup>で解析した。図中に本実験による値を実線で有限要素法による値を破線で示す。

同図から明らかなように、本実験による値と有限要素法による値は非常に良く一致しており、両者の差は最大で5%程度であった。

#### 4.2 主応力 $\sigma_1$ , $\sigma_2$ の分布

前述の結果を用いて材料内部の主応力 $\sigma_1$ と $\sigma_2$ の分布を境界要素法で求めた。なお、解析では出来るだけ少ない分割数から精度の高い結果を得るために線形要素を用いた。また、計算精度は要素分割数を増すと当然向上するが、ここでは要素分割数や要素の大きさを適当に変えて、得られた結果の変動が1%以下となるように効率良く決めた。このようにして定めたモデルの要素分割をFig. 6に示す。

本法は試験片内部の点を自由に選ぶことができ、従って任意の断面の主応力 $\sigma_1$ と $\sigma_2$ が簡単に求められる。これと同じくラプラス方程式に基づく解法として差分法や有限要素法が一般に用いられているが、これらの方法では初期の要素分割に制約を受けることが多く、任意の点の主応力 $\sigma_1$ と $\sigma_2$ が簡単に求められないことがある。この点において本法は何等制約を受けることが無い。

このように本法は任意の断面の主応力 $\sigma_1$ と $\sigma_2$ が簡単に求められ、材料内部のいたるところで主応力 $\sigma_1$ と $\sigma_2$ を分離を行うことができる。しかし紙面の都合上、Fig. 6に示したモデルのA-A断面とB-B断面について求めた。

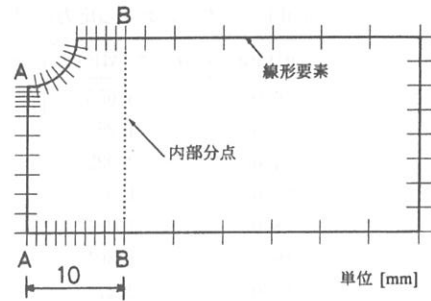


Fig. 6 解析に用いたモデルの要素分割 (境界要素法)

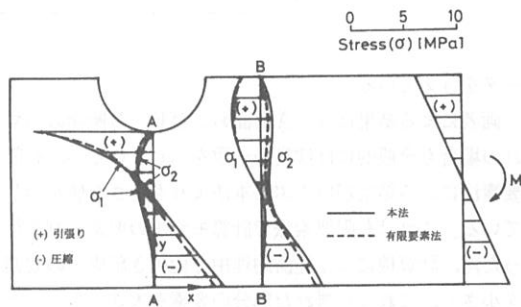


Fig. 7 主応力  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  の分布

Fig. 7はA-A断面とB-B断面の主応力 $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ の分布を示したものである。なお本法による値を実線で、有限要素法による値を破線で示している。またTable 1, 2は本法で求めたA-A断面およびB-B断面の応力のデータ

Table 1 本法における応力のデータ (A-A断面 ( $x=0$ ))

$y$ [mm]	$\sigma_1 - \sigma_2$ [MPa]	$\sigma_1 + \sigma_2$ [MPa]	$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]
0.0	6.955	-6.896	0.030	-6.925
2.0	4.956	-5.076	-0.060	-5.016
4.0	3.469	-3.373	0.048	-3.421
6.0	2.298	-1.680	0.309	-1.989
8.0	1.203	1.057	1.130	-0.073
9.964	0.0	2.083	1.042	1.042
12.0	2.272	4.642	3.457	1.185
13.0	4.180	6.273	5.227	1.047
13.5	5.495	7.245	6.370	0.875
14.0	7.136	8.370	7.753	0.617
14.2	7.901	8.877	8.389	0.488
14.5	9.183	9.721	9.452	0.269
15.0	10.840	10.899	10.870	0.030

Table 2 本法における応力のデータ (B-B断面 ( $x=10$ [mm]))

$y$ [mm]	$\sigma_1 - \sigma_2$ [MPa]	$\sigma_1 + \sigma_2$ [MPa]	$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]
0.0	5.653	-5.717	-0.032	-5.685
2.0	4.252	-4.550	-0.149	-4.401
4.0	2.922	-3.384	-0.231	-3.153
6.0	1.674	-2.239	-0.283	-1.957
8.0	1.035	-1.142	-0.054	-1.089
10.0	1.301	-0.134	0.584	-0.718
12.0	2.274	0.723	1.499	-0.776
14.0	3.297	1.356	2.327	-0.971
16.0	3.567	1.705	2.636	-0.931
18.0	2.741	1.786	2.264	-0.478
20.0	1.768	1.736	1.752	-0.016

ータを与えている。

両者による結果はA-A断面およびB-B断面のいずれの場合も全般的にほぼ良い一致を示しているが、有限要素法による結果がいくぶん本法よりも小さな値を示している。これは有限要素法で計算モデルの要素分割を行った際、計算機による経済的理由で切欠き部周辺の要素を小さく、これより離れた部分の要素を大きくしたことによる影響である。

またFig. 3の切欠き部中央断面には縮次数  $N=0$  の点が存在する。この点ではFig. 7からわかるように  $\sigma_1 = \sigma_2$  であり、この点を境に  $\sigma_1$  と  $\sigma_2$  の方向が入れ代る。

## 5. 結 論

本研究では、境界要素法を援用した光弾性法による主応力解析を行った。得られた結果を要約すると以下の通りである。

- (1) 主応力関に関するラプラス方程式を境界要素法で解いて材料内部の主応力関を求め、これと光弾性法で得られる主応力差を組合せて材料内部の主応力を分離する方法を示した。これによって光弾性法で得られる等

色線のみから材料内部の主応力  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  を簡単に分離することができる。

- (2) 本法の適用例として光弾性法による片側に半円切欠きをもつ帯板の一樣曲げ試験を行い、材料内部の主応力  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  を与えた。また、これと同一モデルを有限要素法で解析し、両者を比較することによって本法の精度を確めた。

なお、本研究は平成8年度久留米工業大学特別研究費の助成を受けたことを記して深謝する。

## 参考文献

- (1) 辻・西田・河田, 光弾性実験法 (1977), 日刊工業。
- (2) 西田, 応力集中 (1969), 森北出版。
- (3) 三木, 光弾性学要論 (1976), 理工新社。
- (4) C. A. プレビア, 境界要素法入門 (1980), 培風館。
- (5) 三木・井川, 日本光弾性学会第5回研究発表講演会講演論文集, No. 5, (1983), pp.33-36。
- (6) 三木・井川・林, 久留米工業大学研究報告, No. 6, (1982), pp.43-48。