

長方形配置および千鳥配置のだ円孔群をもつ 無限体の引張り

—最大応力と引張剛性の計算式—

井川 秀信*・石田 誠**

Rectangular Array and Zig-zag Array of Elliptical Holes in Solids under Uniaxial Tension

—Formulae of Maximum Stresses and Tensile Stiffnesses—

Hidenobu IGAWA and Makoto ISIDA

Abstract

This paper is concerned with a theoretical analysis of a rectangular array and a zig-zag array of elliptical holes in solids under uniaxial tension. In the analyses, we choose suitable unit regions, and express Laurent series expansions for the complex potentials in forms satisfying the traction-free conditions along the elliptical hole edges. Then the unknown coefficients in the Laurent series are determined from the boundary conditions at the outer edges of the used unit regions. At this stage, we use a procedure based on element-wise resultant forces and displacements in order to get highly accurate results. Numerical results of the maximum stresses represented in dimensionless forms in the whole range of the shapes of the holes including cracks, and the tensile stiffnesses of the solids with the holes, are given for various values of the parameters. The results are fitted to reliable polynomial formulae for convenience of engineering applications.

Key words: Two-Dimensional Elasticity, Tension, Stress Concentration, Stress Intensity Factor, Tensile Stiffness, Elliptical Holes, Cracks

1 緒 言

構造物や材料には、き裂を含む種々の形状をした空孔等の欠陥が多く見られ、それらの存在が材料の強度・剛性に多大な影響を及ぼす。

これまでの研究によれば、穴数が少数の場合と一列に配列する場合については種々の解析法により精度の高い結果が与えられている⁽¹⁾⁻⁽⁹⁾。しかし、多数個の穴が分布する場合については解析の困難さのために十分な結果が示されていない。

著者らは穴群がランダムに分布する場合の典型的なモ

デルとして千鳥配置の円孔群を考え、適当な単位領域を用い複素応力関数と合力と変位に基づく境界分割法を組合せてこれらを高精度に解析した⁽¹⁴⁾⁽¹⁵⁾。

本研究では上に述べた解析法をさらに発展させ、穴の形状が異なる場合として長方形配置及び千鳥配置のだ円孔群をもつ無限体の引張りを統一的に解析する。解析には、一個のだ円孔を含む適当な単位領域を考え、この領域に適切でかつだ円孔縁自由条件を満たす複素応力関数の Laurent 展開法と合力と変位に基づく境界分割法を組合せて行った。だ円孔の形状・大きさおよび種々の配列について計算し、穴の干渉がだ円孔縁応力に与える影響お

* 機械工学科 **久留米工業大学名誉教授
平成9年9月11日受理

よび穴群の存在による弾性体の引張剛性の低下を調べ、これらを明らかにする。また解析結果に精度良く適合する計算式を与える。

2 解析方法

2.1 複素応力関数

二次元弾性問題における応力、変位および合力の成分は、二つの複素応力関数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ とそれらの微係数によって次のように与えられる。

$$\sigma_y + \sigma_x = 4\text{Re}[\varphi'(z)]$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \quad (1)$$

$$2G(u - iv) = \kappa\bar{\varphi}(z) - \bar{z}\varphi'(z) - \psi'(z) \quad (2)$$

$$P_y + iP_x = -\bar{\varphi}(z) - \bar{z}\varphi'(z) - \psi'(z) \quad (3)$$

ここに G はせん断弾性係数であり、 κ はポアソン比 ν によって次式で与えられる弾性定数である。

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & (\text{平面応力}) \\ 3-4\nu & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \quad (4)$$

本研究では次の二つの問題を統一的に解析する。

- (a) 長方形配置のだ円孔群をもつ無限体の引張り (Fig. 1(a))
- (b) 千鳥配置のだ円孔群をもつ無限体の引張り (Fig. 1(b))

両問題を通じてだ円孔の主軸長を $2a$, $2b$, 主軸(長さ $2a$) の端の曲率半径を ρ とし、だ円孔の一つの中心に原点をとった座標系 Oxy を Fig. 1(a), (b) のように定める。そして x 方向および y 方向のだ円孔の間隔を与えるパラメータを c , d とし、 y 方向に作用する平均応力を σ とする。

解析には適当な単位領域を考え、 x , y 両軸に関する応力状態の対称条件およびだ円孔縁の境界条件を厳密に満

たす複素応力関数を導き、その中の未知係数を単位領域外周の境界条件から定める方法をとった。この単位領域としては、問題(a)では長方形領域 ODHKO を用い、問題(b)では三角形領域 ODFO を用いた。

まずこれらの解析領域に適合する複素応力関数として次の Laurent 展開を仮定する⁽¹⁾⁽²⁾。

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (G_{2n}z^{-2n-1} + M_{2n}z^{2n+1})$$

$$\psi(z) = -D_0 \log z + \sum_{n=0}^{\infty} (D_{2n+2}z^{-2n-2} + K_{2n}z^{2n+2}) \quad (5)$$

ここに展開係数はすべて実数であり、またこれらは x , y 両軸に関する応力状態の対称条件を満している。

複素応力関数(5)がだ円孔を自由縁とする場合に、係数間に成立つ関係が石田によって求められており⁽¹⁾⁽²⁾、この条件を書くと次のようになる。

$$D_{2n} = \sum_{p=0}^{\infty} a^{2n+2p+2} (P_{2p}^{2n} K_{2p} + R_{2p}^{2n} M_{2p})$$

$$G_{2n} = - \sum_{p=0}^{\infty} a^{2n+2p+2} (Q_{2p}^{2n} K_{2p} + S_{2p}^{2n} M_{2p}) \quad (6)$$

ここに、右辺の係数 P_{2p}^{2n} 等はだ円孔の形 $b/a (= \sqrt{\rho/a})$ の関数である。

以上の関係により、未知係数は M_{2n} , K_{2n} だけとなる。そしてこれらの未知係数は次節で述べる単位領域外周の境界条件から定めた。

2.2 単位領域外周の境界条件と未知係数の決定

式(5)の未知係数 M_{2n} , K_{2n} は単位領域外周の辺の境界条件から定める。しかし、境界条件をそれらの辺上の全ての点で完全に満たすことは不可能なので、合力と変位に基づく境界分割法^{(10)~(15)}を適用した。両問題の境界条件表示は次のようになる。

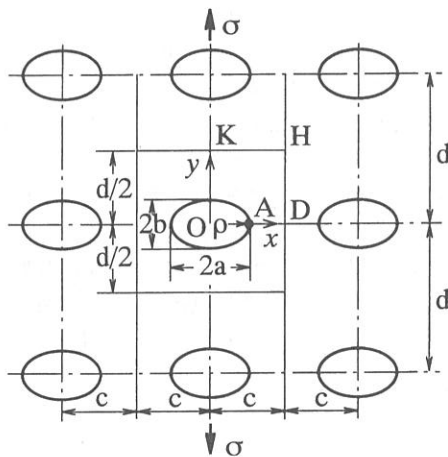


Fig. 1(a) Rectangular array of elliptical holes

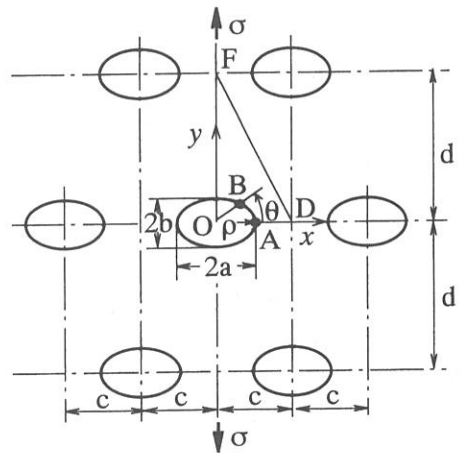


Fig. 1(b) Zig-zag array of elliptical holes

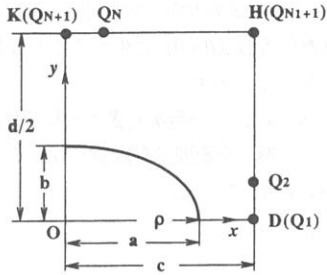


Fig. 2 Rectangular unit region

(a) 長方形配置だ円孔群

Fig. 2 のように長方形領域の辺 DH を N_1 個の等区間に辺 HK を N_2 個の等区間に分割し、分点を $Q_j (j=1, 2, \dots, N+1; N=N_1+N_2)$ とすれば、辺 DH, HK の境界条件は次のようになる。

辺 DH の条件：

応力状態の対称性から辺 DH に沿ってせん断応力 τ_{xy} は零で法線変位 u は一定である。これらは各区間の合力と変位によって次式で置き換えられる。

$$[P_y]_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N_1)$$

$$[u]_{j+1} - [u]_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N_1-1) \quad (7)$$

ここに j は区間番号である。 $[P_y]_j$ としては式(7)を式(3)に用い、その実数部分について点 Q_{j+1} と Q_j における値の差をとればよく、 $[u]_j$ としては式(7)を式(2)に用い、その実数部分について点 Q_{j+1} と Q_j における値の平均値を用いた。すなわち

$$\begin{aligned} [P_y]_j &= P_{y, Q_{j+1}} - P_{y, Q_j} \\ [u]_j &= (u_{Q_{j+1}} + u_{Q_j})/2 \\ &\quad (j=1, 2, \dots, N_1) \end{aligned} \quad (8)$$

辺 HK の条件：

辺 HK に関しても応力状態は対称なので、式(7)と類似の次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} [P_x]_j &= 0 \quad (j=N_1+1, N_1+2, \dots, N) \\ [v]_{j+1} - [v]_j &= 0 \quad (j=N_1+1, N_1+2, \dots, N-1) \end{aligned} \quad (9)$$

ここに $[P_x]_j, [v]_j$ としては式(8)と同様に次式で与えられる。

$$\begin{aligned} [P_x]_j &= P_{x, Q_{j+1}} - P_{x, Q_j} \\ [v]_j &= (v_{Q_{j+1}} + v_{Q_j})/2 \\ &\quad (j=N_1+1, N_1+2, \dots, N) \end{aligned} \quad (10)$$

さらに、この長方形領域に対する外荷重の条件は次式で与えられる。

$$[P_x]_{\text{F}} = 0, [P_y]_{\text{F}} = \sigma b \quad (11)$$

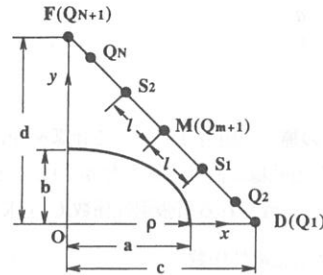


Fig. 3 Triangular unit region

(b) 千鳥配置だ円孔群

Fig. 3 の三角形領域の斜辺 DF の中点を M とすると、応力状態の x 方向および y 方向の周期性から、点 M の両側で M から等距離 l にある二点 (S_1 と S_2) は同じ応力状態であり、またこれらの点 M に対する相対変位も同じである。そこで、斜辺 DF を偶数 N 個の等しい区間に分割し、分点を $Q_t (t=1, 2, \dots, N+1; N=2m)$ とする。

まず、点 M から等距離にある分点 Q_t と $Q_{2m+2-t} (t=1, 2, \dots, m)$ における等応力の条件は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} [P_x]_{Q_t}^{Q_{m+1}} &= [P_x]_{Q_{m+1}}^{Q_{2m+2-t}} \\ [P_y]_{Q_t}^{Q_{m+1}} &= [P_y]_{Q_{m+1}}^{Q_{2m+2-t}} \\ &\quad (t=1, 2, \dots, m; m=N/2) \end{aligned} \quad (12)$$

また、点 M と点 Q_t の相対変位が点 Q_{2m+2-t} と点 M の相対変位に等しい条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} [u]_{Q_t}^{Q_{m+1}} &= [u]_{Q_{m+1}}^{Q_{2m+2-t}} \\ [v]_{Q_t}^{Q_{m+1}} &= [v]_{Q_{m+1}}^{Q_{2m+2-t}} \\ &\quad (t=1, 2, \dots, m; m=N/2) \end{aligned} \quad (13)$$

さらに、この三角形領域に対する外荷重の条件は次式で与えられる。

$$[P_x]_{\text{F}} = 0, [P_y]_{\text{F}} = \sigma b \quad (14)$$

以上により境界条件の数は、問題(a)では式(7), (9), (11) の $2N$ 個、問題(b)では式(12), (13), (14) の $(2N+2)$ 個となる。これに対応して式(5)の未知係数としては、問題(a)では $M_{2n} (n \leq N)$ と $K_{2n} (n \leq N)$ 、問題(b)では $M_{2n} (n \leq N+1)$ と $K_{2n} (n \leq N+1)$ を残し、これらより高次の項を零と置く。そして境界条件式を解いて M_{2n}, K_{2n} を定めれば複素応力関数(5)が確定し、応力・変位等の必要な物理量を計算することができる。

3 計算結果

3.1 精度の検討

計算結果には a, b, c, d の比だけが関係するので、無次元パラメータとして次の $\mu, \lambda, \varepsilon$ を用いた。

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{c}{d}, \lambda = \frac{a}{c} \\ \varepsilon &= \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\rho}{a}} \end{aligned} \quad (15)$$

$\mu, \lambda, \varepsilon$ の種々の組合せについて計算を行い、各場合について、だ円孔縁に沿う接線応力 σ_t の分布とその最大値及び次式で定義される引張剛性係数 C を求めた。

$$\begin{aligned} C &= \frac{E^*}{E_0} = \text{引張剛性係数} \\ E^* &= \text{だ円孔群がある場合の見かけの縦弾性係数} \\ E_0 &= \text{穴のない弾性体の見かけの縦弾性係数} \\ &= \begin{cases} E \text{ (平面応力)} \\ E/(1-\nu^2) \text{ (平面ひずみ)} \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

ここに E は母材の薄板試験片で測定した縦弾性係数、 ν は材料のポアソン比である。

本解析による数値結果の精度は、領域外周の分割数を増すときの値の変動を調べることによって推定することができる。Table 1 は、問題(a)では $c/d=0.5, a/c=0.8, \rho/a=0.25$ の場合について、問題(b)では $c/d=1, a/c=0.6, \rho/a=0.25$ の場合について分割数 N を 8, 16, 24, 32 として得た解析値を示したものである。なお σ_A は Fig. 1 (a), (b) に示す引張方向に直角な孔軸端 A の接線応力である。 σ_A/σ と E^*/E_0 の値は両問題とも N の増加とともに極めて良い収束を示している。以下にのべる解析値はすべて Table 1 のような検討によって十分正しいことを確めてある。

本法によれば、Fig. 1 (a), (b) に示す穴の横方向および縦方向間隔 c, d を自由にとることができるが、以下では問題(a)について $\mu (=c/d)=0.5$ の正方形配置および問題(b)について $\mu (=c/d)=1$ の千鳥配置を解析する。

3. 2 だ円孔無次元応力とその計算式

問題(a)では最大応力 σ_{\max} は引張方向に直角な主軸端 A (Fig. 1 (a)) に生ずる。一方、問題(b)では最大応力 σ_{\max} は計算した多くの場合、点 A ($\theta=0$) に生ずるが、ある

範囲の $\rho/a, \lambda$ では斜め方向の穴同士の干渉によって点 A から離れた位置 B ($\theta \neq 0$) に生ずることもある。その場合の例を Fig. 4 に示す。

これらの応力 σ_A, σ_B の無次元表示としては、円孔からき裂を含む穴の形の全範囲で有限値を与える次の無次元応力 S_A, S_B を用いた^{(6),(7)}。

$$\begin{aligned} S_A &= \frac{\sigma_A}{\sigma_0}, S_B = \frac{\sigma_B}{\sigma_0} \\ \sigma_0 &= \text{無限板にだ円孔が一個の場合の最大応力} \\ &= \sigma \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) = \sigma \left(1 + 2\frac{a}{b} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

S_A, S_B は応力 σ_A, σ_B が他の穴の存在によって1個の場合の何倍となるかを表す干渉効果係数に相当する。

穴が細長くなった極限にあたるき裂の場合、 σ_A, σ_B と σ_0 は同位の無限大となるので、 S_A, S_B は有限確定値となる。そして、これらはき裂先端 A における次の無次元応力拡大係数に一致する。

$$(S_A)_{\rho=0} = (S_B)_{\rho=0} = \frac{K_{I,A}}{\sigma\sqrt{\pi a}} \quad (18)$$

そして S_A, S_B の大きい方を取って得る無次元応力を S_{\max} とした。すなわち次式を得る。

$$S_{\max} = \max(S_A, S_B) \quad (19)$$

数値計算は、問題(a)の正方形配置 ($\mu=0.5$) では $\rho/a=0$ (き裂), 0.2, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0 (円孔), 1.5, 2.0, 4.0 と 0.1 間隔の λ の 75 の組合せについて、問題(b)の千鳥配置 ($\mu=1$) では $\rho/a=0$ (き裂), 0.2, 1/3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0 (円孔), 1.5, 2.0, 3.0, 4.0 と 0.1 間隔の λ の 67 の組合せについて計算を行った。

式(17), (18), (19) から求めた問題(a), 問題(b)の無次元最大応力 S_{\max} を Table 2 (a), (b) に示す。なお Table 2 (b) は右下の破線内が S_B であり、他は S_A である。そして表中の () は最大応力を生ずる位置 B の角度 θ が示してある。

Fig. 5 (a), (b) はこうして得た問題(a), 問題(b)の S_{\max} に

Table 1 Variations of results with subdivision numbers

N	Problem (a) ($c/d=0.5, a/c=0.8, \rho/a=0.25,$ rectangular unit region)		Problem (b) ($c/d=1, a/c=0.6, \rho/a=0.25,$ triangular unit region)	
	σ_A/σ	E^*/E_0	σ_A/σ	E^*/E_0
8	7.9465	0.3533	7.9305	0.2291
16	7.9251	0.3535	7.9284	0.2292
24	7.9251	0.3536	7.9283	0.2292
32	7.9251	0.3536	7.9283	0.2292

Table 2(a) S_{\max} for Problem (a) ($c/d=0.5$)

a/c	ρ/a									
	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	4.0
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	1.003	1.001	1.001	1.001	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.997
0.2	1.012	1.007	1.005	1.004	1.003	1.002	1.001	0.999	0.998	0.994
0.3	1.031	1.019	1.016	1.014	1.013	1.011	1.010	1.008	1.006	1.008
0.4	1.062	1.045	1.040	1.039	1.038	1.037	1.036	1.037	1.041	1.065
0.5	1.113	1.090	1.087	1.086	1.087	1.089	1.093	1.106	1.121	
0.6	1.194	1.166	1.168	1.172	1.177	1.189	1.203	1.239	1.276	
0.7	1.324	1.296	1.319	1.335	1.351	1.386	1.421	1.502	1.574	
0.8	1.558	1.563	1.657	1.706	1.753	1.843	1.924	2.097		

Table 2(b) S_{\max} for Problem (b) ($c/d=1$)

a/c	ρ/a											
	0	0.2	1/3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	1.018	1.024	1.026	1.027	1.028	1.029	1.031	1.033	1.037	1.041	1.047	1.052
0.2	1.073	1.097	1.106	1.110	1.115	1.120	1.130	1.139	1.160	1.179	1.217	1.253
0.3	1.162	1.218	1.240	1.250	1.265	1.280	1.309	1.339	1.413	1.489	1.640	1.772
0.4	1.273	1.365	1.411	1.434	1.470	1.508	1.588	1.677	1.921	2.177	2.641	3.007
0.5	1.383	1.491	1.572	1.619	1.699	1.789	2.019 (11°)	2.335 (17°)	3.285 (23°)	4.383 (26°)		
0.6	1.468	1.546	1.669	1.789 (9°)	2.111 (15°)	2.532 (18°)	3.643 (24°)	5.238 (27°)	14.98 (33°)			

() : Location θ (in degree) of σ_{\max} occurring at the point B.

ついて λ を横軸にとり ρ/a をパラメータとして太い実線で描いたものである。Fig. 5 (b) の細い実線は $S_B > S_A$ となる範囲における S_A を示している。

さて問題(a)の無次元最大応力 S_{\max} は S_A で与えられる。そして各曲線は λ の増大でほぼ単調に増大し、 $\lambda \rightarrow 1$ の極限で発散する。

問題(b)では S_{\max} は λ の広い範囲で S_A で与えられ、各曲線は λ の増大で単調に増大する。しかし、 λ の大きいところではある範囲の ρ/a に対して斜め方向の穴同士の干渉が大きくなり、 S_{\max} は ρ/a で異った発散傾向を示す。すなわち、 $0 \leq \rho/a < 1/3$ では Fig. 6 (i) に示すように $\lambda \rightarrow 1$ で横方向の穴と接触する。この場合の S_{\max} は S_A で与えられ、 $\lambda \rightarrow 1$ の極限で発散する。 $1/3 < \rho/a < 3$ では Fig. 6 (ii) に示すように $\lambda \rightarrow \sqrt{\varepsilon^2 + 1}/(2\varepsilon)$ で斜め方向の穴と接触する。 λ が 0.4 ~ 0.5 付近から斜め方向の穴との干渉が大きくなり、 S_{\max} は S_B で与えられる (Fig. 4)。この場合の S_{\max} は $\lambda \rightarrow \sqrt{\varepsilon^2 + 1}/(2\varepsilon)$ の極限で発散する。さ

らに、 $\rho/a > 3$ では Fig. 6 (iii) に示すように $\lambda \rightarrow 1/\varepsilon$ で上下方向の穴と接触する。しかし計算した $\rho/a, \lambda$ の範囲では S_{\max} は S_A である。

さて問題(a), 問題(b)の解析結果から最小二乗法を用いて、 ε, λ のべき級数表示による S_{\max} の計算式を求めた。その際、問題(b)では Fig. 5 (b) の結果を考慮して、 $\rho/a \leq 1/3$ と $\rho/a \geq 1/3$ で異なる式で表した。なお各式の末尾括弧内に解析値と式による値の差の平均値を付記してある。結果は次の通りである。

問題(a) : 正方形配置 ($\mu=0.5$)

$$\begin{aligned}
 S_{\max} = & 1 + \frac{\lambda^2}{1-\lambda} [0.2757 - 0.4126\varepsilon + 0.1302\varepsilon^2 \\
 & - 0.0376\varepsilon^3 + \lambda(-0.2764 + 1.1465\varepsilon - 1.4701\varepsilon^2 \\
 & + 0.5137\varepsilon^3) + \lambda^2(0.7736 - 2.5802\varepsilon + 6.9170\varepsilon^2 \\
 & - 2.2693\varepsilon^3) + \lambda^3(-1.0006 + 3.7412\varepsilon - 11.9176\varepsilon^2 \\
 & + 4.4548\varepsilon^3) + \lambda^4(0.3349 - 2.2530\varepsilon + 7.6266\varepsilon^2 \\
 & - 3.2603\varepsilon^3)] \quad (\text{平均誤差 } 0.05\%) \quad (20)
 \end{aligned}$$

問題(b)：千鳥配置 ($\mu=1$)

$\rho/a \leq 1/3$ について

$$S_{\max} = 1 + \frac{\lambda^2}{1-\lambda} [1.8169 + 1.0436\epsilon + 0.5876\epsilon^2 + \lambda(-2.1638 + 1.1838\epsilon - 6.2676\epsilon^2) + \lambda^2(3.8925 - 9.3537\epsilon + 35.7642\epsilon^2) + \lambda^3(-12.7934 + 3.9338\epsilon - 56.6534\epsilon^2) + \lambda^4(10.5138 + 1.9845\epsilon + 31.5175\epsilon^2)]$$

(平均誤差0.04%) (21.1)

$\rho/a \geq 1/3$ について

$$S_{\max} = 1 + \frac{\lambda^2}{1 - \frac{2\epsilon\lambda}{\sqrt{\epsilon^2+1}}} [1.7170 + 1.3916\epsilon + 0.2840\epsilon^2 + \lambda(-1.6954 - 0.0039\epsilon - 6.7001\epsilon^2) + \lambda^2(36.2512 - 83.2978\epsilon + 80.8250\epsilon^2) + \lambda^3(-138.479 + 306.085\epsilon - 254.227\epsilon^2) + \lambda^4(129.517 - 298.641\epsilon + 246.157\epsilon^2)]$$

(平均誤差0.6%) (21.2)

式(20)による結果を Fig. 5(a) に破線で、式(21.1)、(21.2)による結果を Fig. 5(b) に点線と破線で示しており、解析値と良く一致している。

3. 3 引張剛性係数とその計算式

Table 3(a), (b)は、前節と同じ ρ/a , λ の組合せについて求めた引張剛性係数 $C = E^*/E_0$ を示したものである。

Fig. 7(a), (b)はこうして得た E^*/E_0 を λ を横軸に取り ρ/a をパラメータとして描いたものである。両問題とも ρ/a が大きくなると曲線群は低下し、その低下の程度は千鳥配置の場合の低下が著しい。

さて、この縦弾性係数の低下は、力の流れがだ円孔によって妨げられる程度に密接に関係する筈である。すな

わち領域内に穴が存在する場合の力の流れは、だ円孔面積とその周辺のデッドゾーンの面積に依存すると考えられる。そこで、だ円孔群が領域全体に占める面積率を f 、デッドゾーンの面積率を q とし、両方の和で表されるパラメータを有効面積率 f_0 とする。だ円孔面積率 f は一般

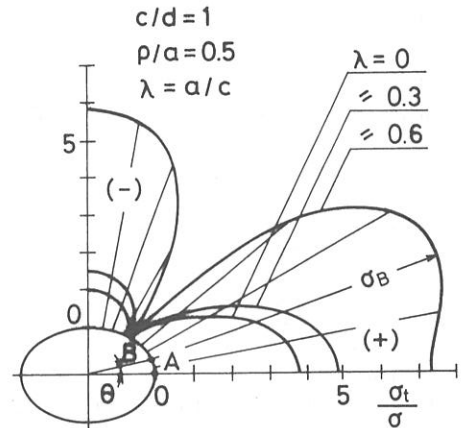


Fig. 4 Distribution of σ_t/σ (Problem (b))

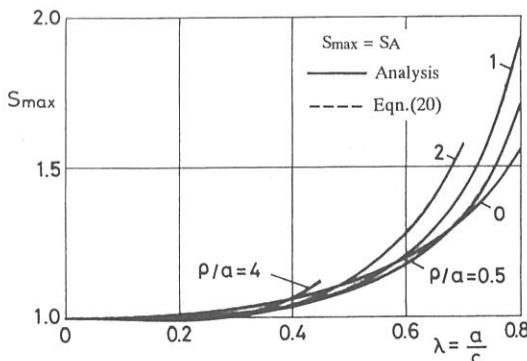


Fig. 5(a) S_{\max} for Problem (a) ($c/d=0.5$)

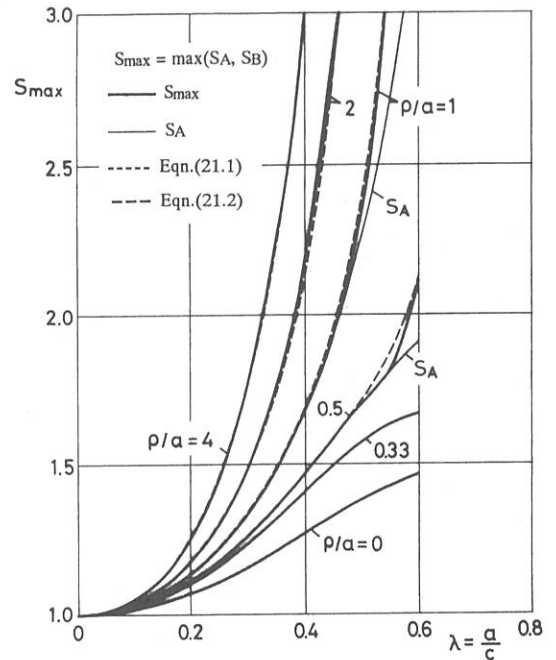


Fig. 5(b) S_{\max} for Problem (b) ($c/d=1$)

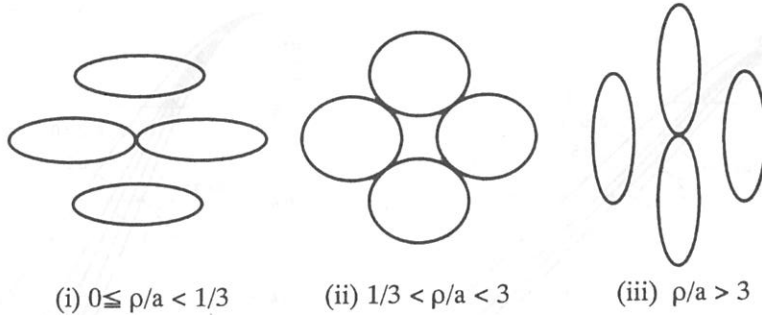


Fig. 6 Three extreme cases when adjacent holes touch each other (Problem (b))

に閉じた形で表すことができる。しかしデッドゾーンの面積率 q を閉じた形で表すことが困難であるため、Table 3(a), (b)の解析値をもとに ε と λ のべき級数で表した。その際、著者らが二重周期き裂群および千鳥分布き裂群をもつ無限体の引張り⁽¹⁶⁾で述べたように $\rho/a \rightarrow 0$ (き裂) では q としてき裂包絡円面積率を用いることが最も有効であったので、これを満足する形で与えた。そして曲線群がき裂群の結果に最もまとまるようにべき級

数の係数を試行錯誤によって定めた。結果は問題(a), (b)で以下の通りである。

問題(a)：正方形配置 ($\mu=0.5$)

$$f_e = f + q$$

$$f = \frac{\pi}{4} \lambda^2 \varepsilon$$

$$q = \frac{\pi}{4} \lambda^2 \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{4} \lambda^2 \varepsilon^2 \right) \quad (22)$$

Table 3(a) E^*/E_0 for Problem (a) ($c/d=0.5$)

a/c	ρ/a									
	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	4.0
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	0.984	0.981	0.980	0.979	0.979	0.978	0.977	0.975	0.974	0.970
0.2	0.940	0.928	0.923	0.921	0.920	0.917	0.914	0.908	0.903	0.889
0.3	0.873	0.850	0.842	0.838	0.835	0.829	0.824	0.814	0.806	0.782
0.4	0.790	0.758	0.746	0.741	0.737	0.729	0.722	0.709	0.698	0.670
0.5	0.698	0.660	0.645	0.639	0.634	0.625	0.617	0.601	0.589	
0.6	0.602	0.560	0.543	0.537	0.531	0.520	0.512	0.495	0.483	
0.7	0.504	0.461	0.442	0.434	0.428	0.416	0.407	0.389	0.376	
0.8	0.405	0.360	0.338	0.330	0.322	0.310	0.300	0.282		

Table 3(b) E^*/E_0 for Problem (b) ($c/d=1$)

a/c	ρ/a											
	0	0.2	1/3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.1	0.969	0.962	0.960	0.959	0.958	0.957	0.955	0.954	0.950	0.947	0.942	0.938
0.2	0.881	0.855	0.848	0.844	0.840	0.836	0.829	0.822	0.809	0.797	0.778	0.762
0.3	0.751	0.699	0.684	0.677	0.668	0.659	0.644	0.631	0.602	0.578	0.542	0.517
0.4	0.603	0.526	0.501	0.490	0.475	0.461	0.436	0.414	0.370	0.337	0.298	0.278
0.5	0.463	0.368	0.335	0.320	0.299	0.279	0.245	0.216	0.164	0.132		
0.6	0.349	0.245	0.204	0.185	0.160	0.137	0.100	0.072	0.028			

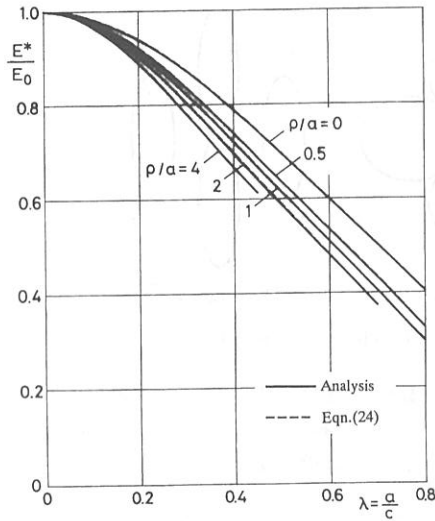


Fig. 7 (a) E^*/E_0 , λ -relations for Problem (a) ($c/d=0.5$)

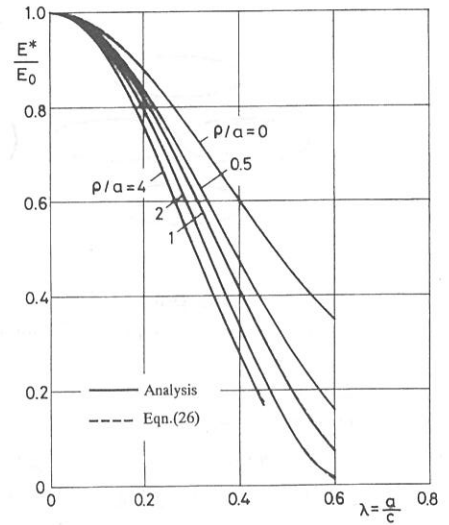


Fig. 7 (b) E^*/E_0 , λ -relations for Problem (b) ($c/d=1$)

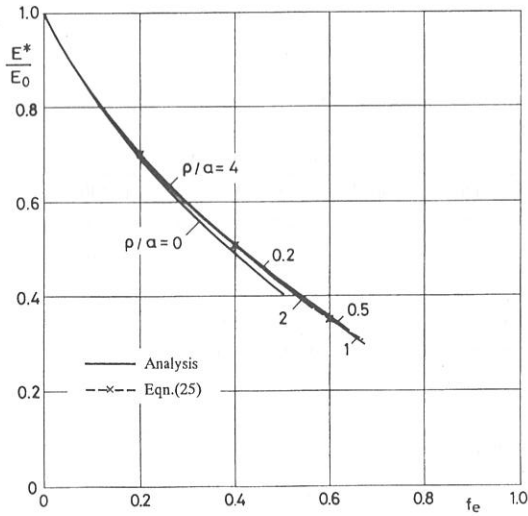


Fig. 8 (a) E^*/E_0 , f_e -relations for Problem (a) ($c/d=0.5$)

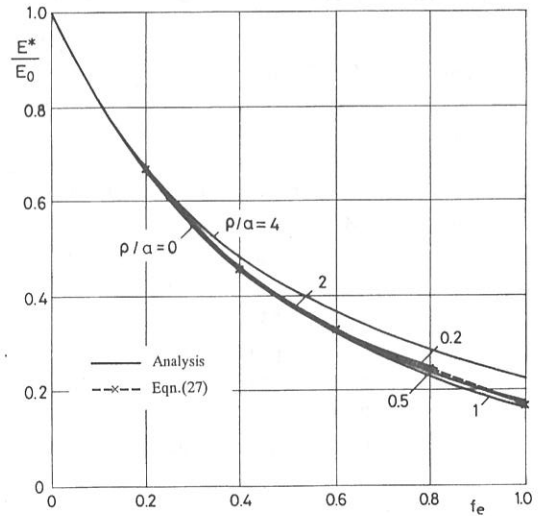


Fig. 8 (b) E^*/E_0 , f_e -relations for Problem (b) ($c/d=1$)

問題(b)：千鳥配置 ($\mu=0$)

$$f_e = f + q$$

$$f = \frac{\pi}{2} \lambda^2 \varepsilon$$

$$q = \frac{\pi}{2} \lambda^2 \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon + 5 \lambda^3 \varepsilon^2 \right)$$

(23)

Fig. 8 (a), (b)は E^*/E_0 を問題(a), 問題(b)についてそれぞれ式(22), (23)で与えられる f_e を横軸に取って示したものである。両問題とも ρ/a に関係なく非常に狭い範囲にまとまっており、式(22), (23)で与えられるパラメータ f_e がだ円孔群の引張剛性係数について有効であることがわかる。以上の引張剛性係数 E^*/E_0 について ε , λ のべき級数

で表した。また E^*/E_0 と f_e の間の関係 (Fig. 8 (a), (b)) を考えて、これを f_e だけによる級数でも表した。

得られた計算式を以下に示す。なおこれらの諸式の末尾括弧内に示した「平均誤差」は、解析値と式による値の相対誤差 (%) の平均値であり、式の正確さの目安となる。

問題(a)：正方形配置 ($\mu=0.5$)

$$\begin{aligned} \frac{E^*}{E_0} = & 1 + \lambda^2[-1.5676 - 0.9146\epsilon + 0.2219\epsilon^2 \\ & - 0.0803\epsilon^3 + \lambda(-0.0873 + 2.2217\epsilon - 3.9416\epsilon^2 \\ & + 1.4311\epsilon^3) + \lambda^2(2.7891 - 7.0999\epsilon + 20.0590\epsilon^2 \\ & - 6.9753\epsilon^3) + \lambda^3(-2.7733 + 14.4914\epsilon - 36.5721\epsilon^2 \\ & + 12.5757\epsilon^3) + \lambda^4(0.8377 - 9.5030\epsilon + 21.3973\epsilon^2 \\ & - 7.3065\epsilon^3)] \quad (\text{平均誤差}0.1\%) \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{E^*}{E_0} = & 1 - 1.9931f_e + 3.3372f_e^2 - 4.6333f_e^3 + 2.6823f_e^4 \\ & (\text{平均誤差}0.5\%) \quad (25) \end{aligned}$$

問題(b)：千鳥配置 ($\mu=1$)

$$\begin{aligned} \frac{E^*}{E_0} = & 1 + \lambda^2[-3.1465 - 1.3896\epsilon - 0.5452\epsilon^2 + 0.4750\epsilon^3 \\ & - 0.1201\epsilon^4 + \lambda(0.1489 - 2.2622\epsilon + 6.6989\epsilon^2 - 5.6249\epsilon^3 \\ & + 1.3413\epsilon^4) + \lambda^2(2.8106 + 8.6220\epsilon - 16.4720\epsilon^2 \\ & + 12.7023\epsilon^3 - 2.8505\epsilon^4) + \lambda^3(5.1229 + 3.7628\epsilon \\ & - 0.6958\epsilon^2 - 5.1790\epsilon^3 + 3.1437\epsilon^4) + \lambda^4(-6.7096 \\ & - 10.4973\epsilon + 8.9222\epsilon^2 + 4.1250\epsilon^3 - 4.2437\epsilon^4)] \\ & (\text{平均誤差}0.7\%) \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{E^*}{E_0} = & 1 - 2.0111f_e + 1.9583f_e^2 - 0.7786f_e^3 \\ & (\text{平均誤差}0.9\%) \quad (27) \end{aligned}$$

式(24), (26)による結果を Fig. 7 (a), (b)に破線で、式(25), (27)による結果を Fig. 8 (a), (b)に×印付き破線で示しており、いずれの計算式も解析値と極めて近い値を与えることがわかる。

4 結 論

(1) 長方形配置 (問題(a)) および千鳥配置 (問題(b)) のだ円孔群をもつ無限体の引張りについて、適当な単位領域を考え、合力と変位による境界条件を用いて精度良く解析した。

(2) 問題(a)では $c/b=0.5$ の正方形配置、問題(b)では $c/b=1$ の千鳥配置についてだ円孔の形状と大きさを系統的に変えたときのだ円孔縁に生ずる最大応力 σ_{\max} を求めた。問題(a)の σ_{\max} は引張方向に直角な主軸端 A ($\theta=0$) に生ずる。問題(b)の σ_{\max} は引張方向に直角な主軸端 A

($\theta=0$) に生ずることが多いが、斜め方向の穴との干渉が大きい場合には σ_{\max} はその穴に近い点 B ($\theta \neq 0$) に移動する。そして問題(a), 問題(b)について無次元最大応力 S_{\max} (き裂の場合には無次元応力拡大係数) を求めた。

(3) 穴の存在は弾性体の引張剛性を低下させる。引張剛性係数 C を一義的に定めるパラメータとしてだ円孔面積率とその周辺のデッドゾーン面積率の和で与えられる有効面積率 f_e を提案し、その有効性を確かめた。

(4) S_{\max} と C の解析値に良く適合する計算式をべき級数の形で与えた。これらによってパラメータの任意の組合せに対する結果が精度良く求められる。

(5) 以上のすべての結果は平面応力と平面ひずみに関係なく、 E , ν などの弾性定数にも無関係である。

参考文献

- (1) 石田, 日本機械学会論文集, **21** (1955), 502.
- (2) Isida, M., Mechanics of Fracture 1, Sih, G.C. (ed.), Noordhoff (1973), 56.
- (3) 西谷, 日本機械学会誌, **71** (1968), 209.
- (4) Nisitani, H., Mechanics of Fracture 5, Sih, G.C. (ed.), Noordhoff (1978), 1.
- (5) 久保, 日本機械学会論文集, **25** (1959), 1101.
- (6) 石田・井川, 久留米工業大学研究報告, No15, (1991), 11.
- (7) 石田・井川, 日本機械学会論文集, **58 A** (1992), 1642.
- (8) 野田・松尾, 日本機械学会論文集, **58 A** (1992), 2179.
- (9) 野田・松尾, 日本機械学会論文集, **59 A** (1993), 785.
- (10) Isida, M., Int. J. Frac. Mech., **7** (1971), 301.
- (11) 石田・野口, 日本機械学会論文集, **48 A** (1972), 888.
- (12) 石田, 日本機械学会論文集, **48 A** (1972), 1239.
- (13) 石田・佐藤, 日本機械学会論文集, **50 A** (1984), 1619.
- (14) 石田・井川, 久留米工業大学研究報告, No11, (1987), 31.
- (15) 石田・井川, 日本機械学会論文集, **54 A** (1988), 1495.
- (16) 石田・井川, 日本機械学会論文集, **55 A** (1989), 238.