

〔論文〕

周期配列をした傾斜き裂群をもつ無限体の引張り

井川 秀信^{*1}

Tension of Infinite Solids Containing Periodic Arrays of Slant Cracks

Hidenobu IGAWA^{*1}

Abstract

During the early stages of fracture, microcracks emerge from material slips caused by shear stress. Through the growth and incorporation process, these microcracks evolve into macrocracks, resulting in final fracture. Thus, further elucidating the interaction of these cracks is imperative to clarify the progression of fatigue fractures.

This study examines periodic arrays of slant cracks in an infinite plate, employing a specific unit region and the Body Force Method. This method adheres to traction-free conditions at the crack edge and introduces body force densities derived from resultant forces, thus achieving high-precision results. The findings including stress intensity factors and tensile stiffness of slant cracks are presented in formats conducive to practical application.

Key Words :Two dimensional elasticity, Slant cracks, Body force method, Stress intensity factor, Tensile stiffness

1. 緒言

疲労破壊では、材料に繰返し負荷がかかることにより、表面または内部の欠陥や割れなどを起点として小さい割れが徐々に進行し、最終的に構造物が破壊する。この現象は、機械部品の破壊事故で多く見られる。

特に疲労破壊の初期段階では、数多くの微小なき裂が見られ、それらが成長および合体を繰り返し最終破壊に至る。従って、き裂の発生や成長には、微小き裂の干渉が影響する。

疲労寿命の予測にはき裂先端の応力場を示すパラメーターである応力拡大係数が重要な役割を持ち、それを高精度に求めるため計算機によるシミュレーションが数多く行われてきた。

石田らは、周期配列のき裂群の引張りについて固有関数展開法による応力解析を行い、無次元応力拡大係数および引張剛性係数の結果を与えた^{(1),(2)}。また傾斜き裂群について、ローラン展開法、固有関数展開法や体積力法等による応力解析が行われた^{(3)~(5)}。

著者は、周期配列のき裂群について、固有関数展開法による解析を行った^{(6),(7)}。また、複数個の傾斜き裂について体積力法による高精度な応力解析法を提案し、き裂干渉問題について応力拡大係数に関する資料を与えた^{(8),(9)}。さらに、周期配列の傾斜き裂群について体積力法と複素応力関数を組み合わせた高精度な応力解析法の開発に取り組んでいる⁽¹⁰⁾。

本研究は、二方向に周期的に配列した傾斜き裂群をもつ無限体の引張りについて、応力状態の対称性を考慮した高精度応力解析法を提案する。解析には一個の傾斜き裂を含む適当な単位領域を考えた。そして領域内の応力状態を複素応力関数の級数展開で与え、き裂縁の自由条件を満たすように体積力を分布させた。本法を用いて異なる配列をした周期き裂群について解析し、応力拡大係数およびき裂群の存在による引張剛性の低下について調べる。

2. 解析方法

2・1 複素応力関数

二次元弾性問題における応力、合力、変位の成分は、複素応力関数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ とそれらの微係数によって次のように与えられる。

^{*1} 交通機械工学科
令和5年9月29日受理

$$\sigma_y + \sigma_x = 4 \operatorname{Re}[\varphi(z)] \quad (1)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \quad (2)$$

$$P_y + iP_x = -\bar{\varphi}(\bar{z}) - \bar{z}\varphi'(z) - \psi'(z) \quad (3)$$

$$2G(u - iv) = \kappa\bar{\varphi}(\bar{z}) - \bar{z}\varphi'(z) - \psi'(z) \quad (4)$$

ここに G はせん断弾性係数で、 κ はポアソン比 ν によって次式で与えられる。

$$\kappa = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & (\text{平面応力}) \\ 3-4\nu & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \quad (5)$$

本研究では、Fig. 1 に示した Problem (a)～(c) の縦横の二方向に周期的に配列した傾斜き裂群を考える。各問題に共通してき裂の長さ $2a$ 、その傾斜角度を θ とする。き裂群の横方向と縦方向の間隔を与えるパラメーターを $2b$, $2c$ とし、き裂の一つの中心に原点 O と座標系 Oxy を図のように定める。そして y 方向に引張応力 σ が作用するものとする。

解析には一個のき裂を含む適当な単位領域を考え、領域内の応力状態を複素応力関数で表すとともにき裂縁の条件を体積力法で満足させる方法をとった。この単位領域として Fig.1 に示した長方形領域 DEFG を用いた。具体的な解析方法は、以下の通りである。

先ず、Fig.2(a) に示す長方形領域に任意の外力 $P_{x,a}^*$, $P_{y,a}^*$ および変位 u_a^* , v_a^* を受ける場合を考える。このときの領域内の応力と変位は次に示す 2 つの複素応力関数 $\varphi_a(z)$, $\psi_a'(z)$ で与えられる。

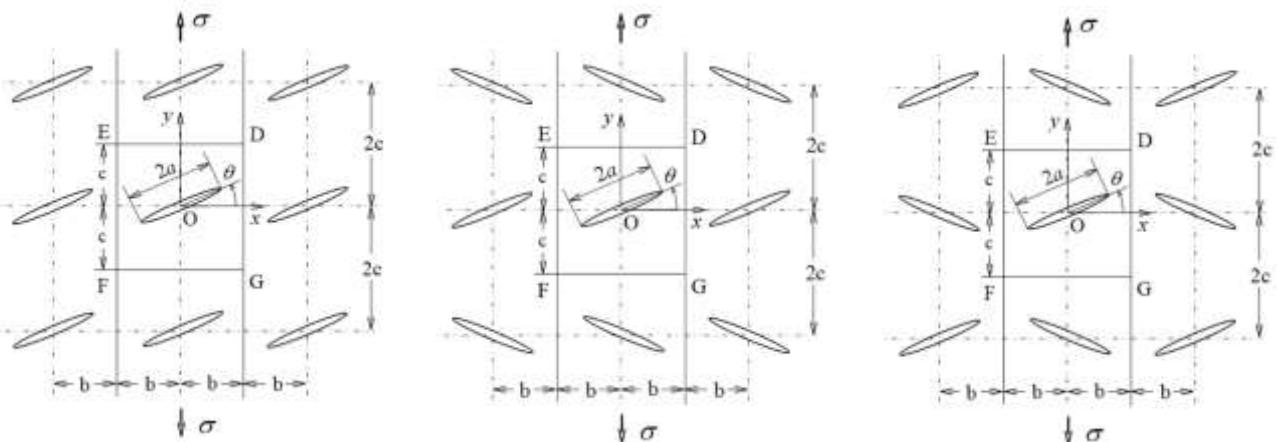
$$\varphi_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^{n+1}, \quad \psi_a'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n z^{n+1} \quad (6)$$

ここに M_n , K_n は、複素係数である。

式(6)によって Fig.2(a) に示した領域内の応力と変位の状態を求めることができるが、き裂縁が自由となる条件を満たしていない。そこで、著者がこれまで開発してきた体積力法によるき裂縁を自由とする解析法を用いる^{(8)～(12)}。

具体的には、Fig.2(a) に示した領域内の中心に角度 θ の仮想き裂を考える。座標 Oxy と仮想き裂面に沿った法線方向 n と接線方向 s を図のように定める。

次に、Fig.2(b) に示すようにき裂相当面に沿って引張り型とせん断型の集中力対を同時に分布させ、き裂縁が自由となる



(1) Problem (a)

(2) Problem (b)

(3) Problem (c)

Fig. 1 Periodic arrays of slant cracks

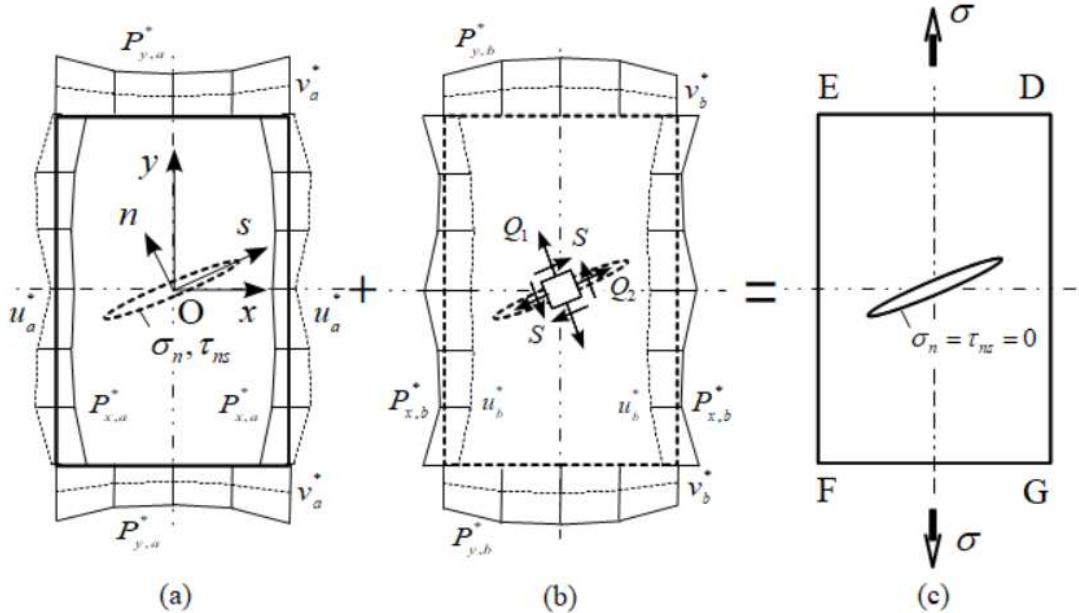


Fig. 2 Analytic model

条件を満足させる。それらの集中力対は、Fig.3に示した集中力 R の基礎式から求めることができる。すなわち

$$\varphi(z) = -\frac{R}{2\pi(\kappa-1)} \log(z-\zeta), \quad \psi'(z) = \frac{1}{2\pi(\kappa-1)} \left[\kappa R \log(z-\zeta) + R \frac{\zeta}{z-\zeta} \right] \quad (7)$$

ここに ζ は、原点 O からの距離である。

Fig.2(b)に示した引張り型の集中力対は、引張応力を受ける場合にき裂縁を自由にする関係式であり、式(7)から求めたき裂面に直角な方向（法線方向 n ）の体積力対 $Q_1 = q_1(t)dt$ とき裂面方向（接線方向 s ）の体積力対 $Q_2 = q_2(t)dt$ を分布させることで求められる。ここに $q_1(t)$, $q_2(t)$ はき裂面に分布させる体積力対の密度であり、 t はき裂中心からの距離である。そして Q_1 , Q_2 の体積力がき裂縁にせん断応力を生じないための条件が石田によって求められており⁽⁵⁾、これを書くと次のようになる。

$$q_2(t) = \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \frac{dq_1(t)}{dt} \quad (8)$$

従って求める体積力の密度は $q_1(t)$ だけとなり、それらの複素応力関数を $\varphi_b(z)$, $\psi'_b(z)$ とする。

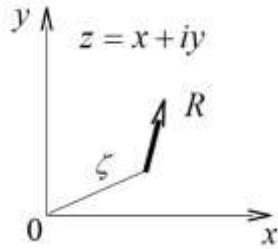


Fig. 3 Force acting on a plane

Fig.2(b)に示したせん断型集中力対は、面内せん断を受ける場合にき裂縁を自由にする関係式であり、式(7)から求めたせん断力型の体積力対 $S = w(t)dt$ をき裂相当面に分布させることで求められる。ここに $w(t)$ はき裂面に分布させる体積力の密度である。それらの複素応力関数を $\varphi_c(z)$, $\psi'_c(z)$ とする。

以上によって、 Q , S が同時に作用する場合の関数は、

$$\varphi(z) = \varphi_a(z) + \varphi_b(z) + \varphi_c(z), \quad \psi'(z) = \psi'_a(z) + \psi'_b(z) + \psi'_c(z) \quad (9)$$

となり、き裂面に沿った法線方向 n と接線方向 s の合力は次式から求められる。

$$P_n + iP_s = (P_y + iP_x)e^{i\theta} = [-\bar{\varphi}(\bar{z}) - \bar{z}\varphi'(z) - \psi'(z)]e^{i\theta} \quad (10)$$

本研究では、き裂面を自由縁とするために引張り型の体積力対 $Q = Q_1 + Q_2$ とせん断型の体積力対 S をき裂相当面に同時に分布させる。

き裂解析には各き裂縁に体積力対分布させる必要があるが、き裂の座標系と幾何学パラメーターを Fig.4 の様に定め、各き裂先端局部応力場の特性に適合する次の関係式を用いる。

$$q_1(t) = 4\sqrt{a^2 - t^2} f(t), \quad w(t) = 4\sqrt{a^2 - t^2} g(t) \quad (11)$$

式(11)の重み関数 $f(t)$, $g(t)$ は、Fig.5 に示した折れ線関数による合力境界分割法で求めた。

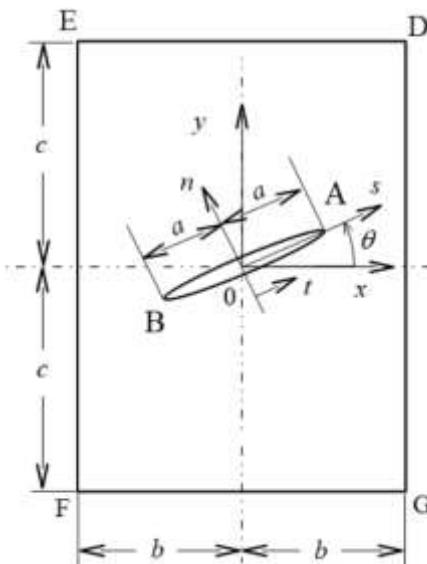


Fig. 4 Rectangular plate with a slant crack

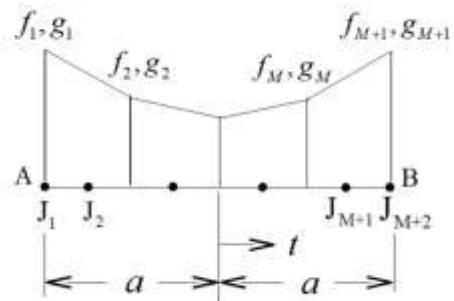


Fig. 5 Subdivision of crack for numerical evaluation of weighting function

2・2 応力解析の概要

式(6)の未知係数 M_n , K_n および式(11)の体積力の重み関数 $f(t)$, $g(t)$ は、Fig.4 の単位領域 DEFG の外周の辺 DE, EF, FG, GD の境界条件、き裂縁の自由条件から合力と変位に基づく境界分割法を用いて定める^{(1),(2)}。なお、外周の各辺は、応力状態の x 方向および y 方向の周期性から領域外周の辺の応力状態の対称性から次に述べる点対称の応力条件と面对称の応力条件に分類される。

次にそれらの応力条件の解析方法について述べる。

(a) 点対称の応力条件

Problem (a) の辺 EF を例に点対称の応力条件とその解析方法について述べる。

Fig.7 の辺 EF の中点を M とすると、応力状態の x 方向および y 方向の周期性から、点 M の両側で M から等距離 l にある二点は同じ応力状態であり、またこれらの点 M に対する相対変位も同じである。そこで、便宜上、辺 EF を偶数 $N_1 (= 2m)$ 個の等しい区間に分割し、分点を H_e ($e = 1, 2, \dots, N_1 + 1; N_1 = 2m$) とする。

先ず点 M から等距離にある分点 H_e と H_{2m+2-e} ($e = 1, 2, \dots, m$) における等応力条件は、これらの点と点 M (すなわち点 H_{m+1}) における合力の差によって次式で与えられる。

$$\left[P_y + iP_x \right]_{H_e}^{H_{m+1}} = \left[P_y + iP_x \right]_{H_{m+1}}^{H_{2m+2-e}} \quad (e = 1, 2, \dots, m; m = N_1 / 2) \quad (12)$$

また、点 M の相対変位が点 H_{2m+2-e} と点 M の相対変位に等しい条件は次のようになる。

$$\left[u - iv \right]_{H_e}^{H_{m+1}} = \left[u - iv \right]_{H_{m+1}}^{H_{2m+2-e}} \quad (e = 1, 2, \dots, m; m = N_1 / 2) \quad (13)$$

辺 EF, FG, GD に関しても点対称の応力条件であり、同様に式(12)～(14)を適用することができる。

さらに外荷重の条件は、辺 DE (=FG), 辺 EF (=GD) について次式で与えられる。

$$\left[P_y + iP_x \right]_D^E = \sigma \cdot 2b, \quad \left[P_y + iP_x \right]_E^F = 0 \quad (14)$$

(b) 面対称の応力条件

Problem (c) の辺 DE (=FG) と辺 EF (=GD) を例に面対称の応力条件とその解析方法について述べる。

辺 DE (=FG) の条件 :

面対称性の応力条件から Fig.8 の辺 DE に沿ってせん断応力は零で法線変位 v は一定である。これらの各区間の合力と変位によって次式で置きかえられる。

$$\left[P_x \right]_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N_1) \quad (15)$$

$$\left[v \right]_{j+1} - \left[v \right]_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N_1 - 1) \quad (16)$$

ここに j は区間番号である、 $\left[P_x \right]_j$ としては、式(3) の虚数部分について点 H_{j+1} と H_j における値の差をとればよし、 $\left[v \right]_j$ としては式(4) の虚数部分について点 H_{j+1} と H_j における値の平均値を用いた。すなわち

$$\left[P_x \right]_j = P_{x,H_{j+1}} - P_{x,H_j} \quad (17)$$

$$\left[v \right]_j = (v_{H_{j+1}} + v_{H_j}) / 2 \quad (j = 1, 2, \dots, N_1) \quad (18)$$

辺 EF (=GD) の条件 :

Fig.8 の辺 EF に関しても面対称の応力条件から、式(15)～(18)と類似の関係が成り立つ。

$$\left[P_y \right]_j = 0 \quad (j = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N_1 + N_2) \quad (19)$$

$$\left[u \right]_{j+1} - \left[u \right]_j = 0 \quad (j = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N_1 + N_2 - 1) \quad (20)$$

ここに $\left[P_y \right]_j$ と $\left[u \right]_j$ は式(17), (18) と同様に

$$\left[P_y \right]_j = P_{y,H_{j+1}} - P_{y,H_j} \quad (21)$$

$$\left[u \right]_j = (u_{H_{j+1}} + u_{H_j}) / 2 \quad (j = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N_1 + N_2) \quad (22)$$

さらに、辺 DE (=FG), 辺 EF (=GD) の外周の荷重条件は、次式で与えられる。

$$\left[P_y \right]_D^E = \sigma \cdot 2b, \quad \left[P_x \right]_E^F = 0 \quad (23)$$

なお、Problem (b) では、辺 DE (=GF) を点対称の応力条件、辺 EF (=GD) を面対称の応力条件として、式(12)～(23)を適当に組み合わせて解析する。

領域外周の全分割数を N ($= N_1 + N_2 + N_3 + N_4$) とすれば、 M_n , K_n を定めるための境界条件は Problem (a) で $(4N + 8)$ 個、Problem (b) で $(4N + 4)$ 個、Problem (c) で $(4N)$ 個となる。そこで式(6)の未知係数 M_n , K_n の実数部と虚数部を含めて Problem (a) で $(4N + 8)$ 個、Problem (b) で $(4N + 4)$ 個、Problem (c) で $(4N)$ 個を残し、これらより高次の項を零と置くことにより、Fig.2(a)に示した単位領域外周に合力 $P_{x,a}^*$, $P_{y,a}^*$ および変位 u_a^* , v_a^* を受ける場合の応力状態が定めることができる。さらに Fig.2(b)に示す様に単位領域内に傾斜き裂を実現するためにき裂相当面に体積力を分布させてき裂縁自由の条件

を満足させる。それにより新たに単位領域外周に合力 $P_{x,b}^*$, $P_{y,b}^*$ および変位 u_b^* , v_b^* を生ずるが、周期傾斜き裂群の境界条件を満たす様に Fig.2(a)と Fig.2(b)を組合わせて連立に解くことにより式(6)の未知係数 M_n , K_n と式(11)の体積力の重み関数 $f(t)$, $g(t)$ を求めた。

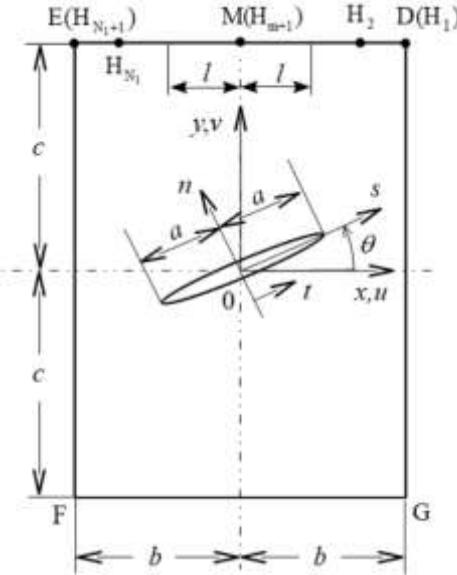


Fig. 7 Stress condition of the point symmetry

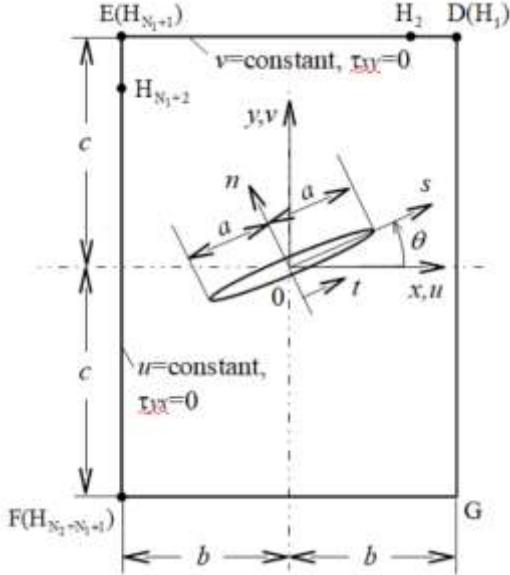


Fig. 8 Stress condition of the planar symmetry

Fig.4 に示したき裂端 A, B の応力拡大係数は次式で求める。

$$K_{I,A}, K_{I,B} = [f(t)]_{t=\pm a} \sqrt{\pi a}, \quad K_{II,A}, K_{II,B} = [g(t)]_{t=\pm a} \sqrt{\pi a} \quad (24)$$

3. 解析結果

3・1 計算した物理量と計算精度

本研究では、次式で定義されたモード I, モード II の無次元応力拡大係数および引張剛性係数を求めた。

無次元応力拡大係数

$$F_{I,A} = \frac{K_{I,A}}{\sigma \sqrt{\pi a}}, \quad F_{I,B} = \frac{K_{I,B}}{\sigma \sqrt{\pi a}}, \quad F_{II,A} = \frac{K_{II,A}}{\sigma \sqrt{\pi a}}, \quad F_{II,B} = \frac{K_{II,B}}{\sigma \sqrt{\pi a}} \quad (25)$$

引張剛性係数

$$C = \frac{E^*}{E_0}$$

$$E^* = \text{き裂がある場合の平均引張弾性係数} \quad (26)$$

$$E_0 = \text{き裂がない場合の引張弾性係数}$$

$$= \begin{cases} E & (\text{平面応力}) \\ \frac{E}{1-\nu^2} & (\text{平面ひずみ}) \end{cases}$$

石田らは引張荷重を受ける二重周期き裂群について固有関数展開による解析法を開発し、無次元応力拡大係数 $F_{I,A}$ および引張剛性係数 C の結果を与えた^{(1),(2)}。本法の Problem (a)~(c) ではき裂の傾斜角 $\theta=0^\circ$ に相当し、

$c/b=1$, $a/b=0.5$ の場合について両者による無次元応力拡大係数 $F_{I,A}$ および引張剛性係数 C 値を Table 1 に示す.

なお, 本法による Problem (a)~(c) の計算値は, 有効数字 6 衡まで示している

両者による計算値は, 有効数字 3 衡あるいは 4 衡まで良い一致を示していることが分かる.

Table 1 Values of $F_{I,A}$ and C

Classification	Calculated value	
	$F_{I,A}$	C
Eigen function expansions	1.113	0.698
Problem (a)	1.11329	0.69796
Problem (b)	1.11328	0.69796
Problem (c)	1.11328	0.69796

3・2 引張応力を受ける周期傾斜き裂群の無次元応力拡大係数と引張剛性係数

Fig.9 は, Problem (a)~(c) についてき裂の間隔 $c/b=1$, き裂の傾斜角度 $\theta=0^\circ \sim 90^\circ$ に対する無次元応力拡大係数 $F_{I,A}$ ($=F_{I,B}$) と $\lambda=a/b$ の関係を示したものである. また, Fig.10 は, き裂の間隔 $c/b=1$, き裂の傾斜角度 $\theta=0^\circ \sim 45^\circ$ に対する無次元応力拡大係数 $F_{II,A}$ ($=F_{II,B}$) と $\lambda=a/b$ の関係を示したものである. 両図ともに Problem (a) の結果を実線, Problem (b) の結果を破線, $F_{I,A}$, Problem (c) の結果を二点鎖線で示している. なお, $F_{I,A}$, $F_{II,A}$ は, $\lambda \rightarrow 0$ では無限板に一個の傾斜き裂をもつ場合となり, 次の値となる.

$$[F_{I,A}]_{\lambda \rightarrow 0} = \cos^2 \theta, [F_{II,A}]_{\lambda \rightarrow 0} = \cos \theta \sin \theta \quad (27)$$

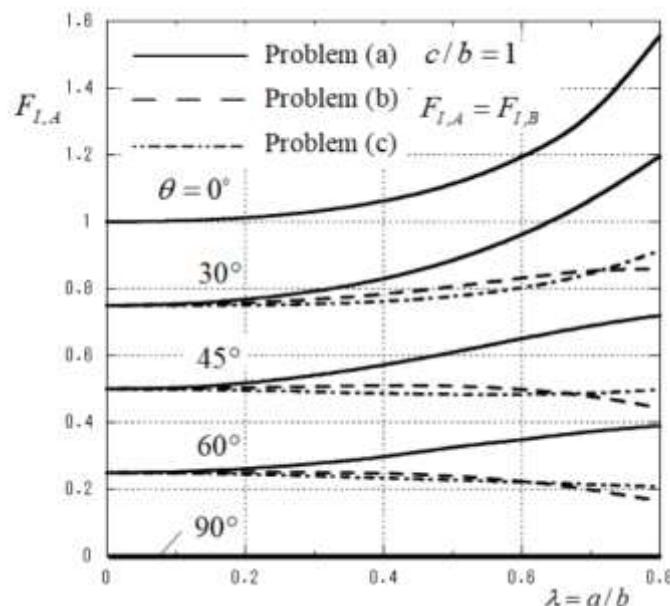


Fig. 9 $F_{I,A}, \lambda$ -relations for tension

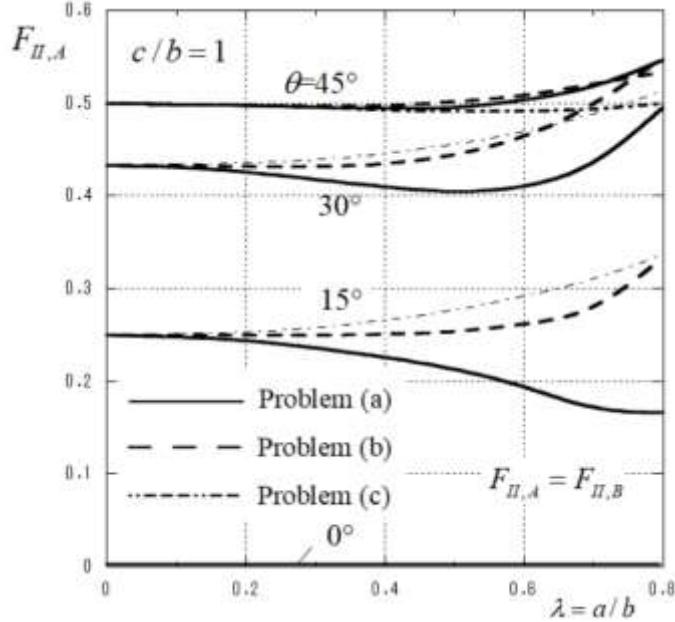
Fig. 10 $F_{II,A}$, λ -relations for tension

Fig.9 に示したモード I の無次元応力拡大係数 $F_{I,A}$ ($= F_{I,B}$) は、 $\theta=0^\circ$ すなわちき裂縁が引張方向と直角のとき最大となり、 θ の増大で $F_{I,A}$ の曲線群が低下する。

一方、Fig.10 に示したモード II の無次元応力拡大係数 $F_{II,A}$ は、 $\theta=0^\circ$ で最も小さく、 θ の増大で $F_{II,A}$ の曲線群が増大する。そして $\theta=45^\circ$ のとき $F_{II,A}$ が最大となり、図中には示していないがこれより θ が大きくなると $F_{II,A}$ の曲線群は逆に低下する。

Problem (a)～(c) の周期配列の違いによる $F_{I,A}$, $F_{II,A}$ は、 λ が小さいときではほとんど差はないが、 λ が 0.4 より大きくなるとき裂の傾斜角 θ よって λ の増大で異なる増大・減少を示す。

次に引張剛性係数 C の解析結果について述べる。

石田らは、単位領域にき裂が占める有効面積率を考え、引張剛性係数と有効面積率が良い相関関係にあることを示した⁽¹⁾、⁽²⁾。しかし傾斜き裂では、傾斜角度 θ によって C の傾向が異なるため、有効面積率が適用できない。そこで傾斜き裂に有効なパラメーターとして次のき裂密度 ρ を提案する。

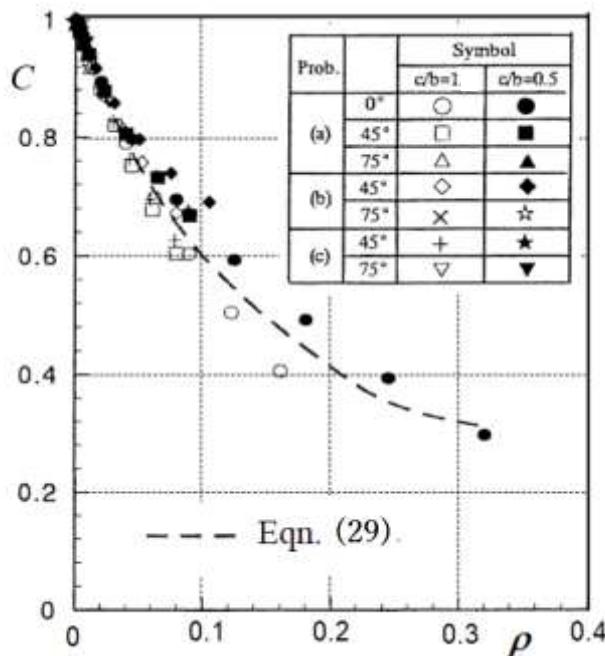
$$\rho = \frac{(a \cos \theta)^2}{A}, \quad A = 4bc \quad (\text{単位領域の面積}) \quad (28)$$

Fig.11 は、き裂の間隔 $c/b=0.5$ および 1 について引張剛性係数 C と ρ の関係を示したものである。同図より Problem (a)～(c) の引張剛性係数 C は、き裂の傾斜角度 θ にほぼ関係なくき裂密度 ρ と非常に良い相関関係にあることが認められる。

以上の結果から、き裂密度 ρ をパラメーターとする引張剛性係数 C の近似式を次のように与えた。なお、引張剛性係数 C は、近似式の適用範囲を幅広く持たせるためき裂の間隔 $c/b=0.5 \sim 2$ についてき裂の傾斜角度 θ とき裂長さ λ を適当に変えて計算を行い、最小二乗法で近似式を求めた。

$$C = \frac{E^*}{E_0} = 1 - 6.1443\rho + 29.921\rho^2 - 93.758\rho^3 + 122.73\rho^4 \quad (29)$$

Fig.11 に近似式 (29) の結果を破線で示したが、近似式は、 ρ が 0.1 以下では平均誤差 1.1[%]、 ρ が 0.3 以下では平均誤差 2.7[%] 以下で引張剛性係数を求めることができる。

Fig. 11 C , ρ -relations for tension

4. 結 論

- (1) 周期傾斜き裂群をもつ無限板に引張応力を受ける場合について応力条件の対称性を考慮した長方形単位領域を考案し、体積力法と複素応力関数を組み合わせた高精度な応力解析法を開発した。
- (2) 本法を用いて Problem (a)～(c) の傾斜き裂の角度が異なる場合のモード I, モード II の無次元応力拡大係数および引張剛性係数を精度良く求めた。
- (3) 引張剛性係数は、Problem (a)～(c) のいずれもき裂密度 ρ と非常に良い相関関係にある。また、引張剛性係数に対する近似式を与えた。

文 献

- (1) 石田誠, 井川秀信, “二重周期き裂群および千鳥分布き裂群をもつ無限体の引張り”, 日本機械学会論文集, 第 510 号 A 編 (1989), pp. 238–245.
- (2) M. Isida, H. Igawa, “Doubly-periodic array and zig-zag array of cracks in solids under uniaxial tension”, International Journal of Fracture, Vol. 53 (1992), pp. 249–260.
- (3) M. Isida, “Method of Laurent series expansion for internal crack problems”, Mechanics of Fracture I (1973), Edited by G. C. Shi, Noordhoff International Publishing, pp. 56–130.
- (4) 石田誠, 中島憲昭, 岸根延幸, “き裂をもつ長方形領域および周期き裂群の種々の問題”, 日本機械学会論文集, 第 413 号 A 編 (1981), pp. 27–35.
- (5) 石田誠, 野口博司, “任意分布き裂群を持つ接合半無限体の面内荷重問題”, 日本機械学会論文集, 第 437 号 A 編 (1983), pp. 36–45.
- (6) H. Igawa, “Tension of an infinite solid containing a doubly-periodic array of slant cracks”, Boundary Element Technology VIII (1999), WTT Press, pp. 568–575.
- (7) H. Igawa, “In-plane shear of an infinite solid containing a doubly-periodic array of slant cracks”, Boundary Element Technology VIII (1999), WTT Press, pp. 609–618.
- (8) 井川秀信, “任意に分布するき裂群の解析(第1報:引張応力を受ける無限板)”, 久留米工業大学研究報告, No. 31 (2008), pp. 15–20.

- (9) 井川秀信, “任意に分布するき裂群の解析(第2報:面内せん断を受ける無限板)”, 久留米工業大学研究報告, No. 33 (2010), pp. 7-13.
- (10) 井川秀信, “二重周期配列の傾斜き裂群をもつ無限体の解析”, 久留米工業大学研究報告, No. 45 (2022), pp. 42-50.
- (11) 井川秀信, “2個の等長傾斜き裂の解析(第1報:引張応力を受ける場合)”, 久留米工業大学研究報告, No. 42 (2019), pp. 89-99.
- (12) 井川秀信, “2個の等長傾斜き裂の解析(第2報:面内せん断を受ける場合)”, 久留米工業大学研究報告, No. 43 (2020), pp. 54-64.