

長方形配置の円孔群をもつ無限体の引張り

——応力集中係数と引張剛性の計算式——

井川 秀信*

Rectangular Array of Circular Holes in Solid under Uniaxial Tension

——Formulae of Stress Concentration Factors and Tensile Stiffnesses——

Hidenobu IGAWA

Abstract

This paper is concerned with a theoretical analysis of a rectangular array of circular holes in a solid under uniaxial tension. In the analysis, we choose a suitable unit region, and express Laurent series expansions for the complex potentials in forms satisfying the traction-free conditions along the circular hole edge. Then the unknown coefficients in the Laurent series are determined from the boundary conditions at the outer edges of the used unit region. At this stage, we use a procedure based on element-wise resultant forces and displacements in order to get highly accurate results. Numerical results of the stress concentration factors, and the tensile stiffnesses of the solids with the holes, are given for various values of the parameters. The results are fitted to reliable polynomial formulae for convenience of engineering applications.

Key words: Two-Dimensional Elasticity, Tension, Stress Concentration Factor, Tensile Stiffness, Circular Holes

1. 緒 言

構造物中には、空孔等の欠陥が複数個で分布する場合が多く見られ、これが構造物の強度・剛性を低下させることはよく知られている。従って構造物を安全に使用するためには穴の存在が材料の強度・剛性に与える影響を正確に把握しておく必要がある。

石田らは、穴が各方向に分布する場合の典型的なモデルとして千鳥配列の円孔群をもつ無限体の引張りを解析し、応力干渉効果と穴の存在が弾性体の引張剛性に与える影響を明らかにした^{(1), (2), (3)}。しかし、穴が長方形に配置する場合もあり、これについては十分な検討がなされていないようである。

本研究では、長方形配置の円孔群をもつ無限体の引張りについて Laurent 展開法を用いて高精度に解析し、応

力干渉効果と穴の存在が弾性体の引張剛性に与える影響について詳細に調べる。さらに、応力集中係数と引張剛性係数を精度よく求めることができる計算式を与える。

2. 解析方法

2.1 複素応力関数

二次元弾性問題における応力、変位および合力の成分は、二つの複素応力関数 $\varphi(z)$, $\psi(z)$ とそれらの微係数によって次のように与えられる。

$$\sigma_y + \sigma_x = 4 \operatorname{Re}[\varphi'(z)] \quad (1)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \quad (1)$$

$$2G(u - iv) = x\bar{\varphi}(\bar{z}) - \bar{z}\varphi'(z) - \psi'(z) \quad (2)$$

$$P_y + iP_x = -\bar{\varphi}(\bar{z}) - \bar{z}\varphi'(z) - \psi'(z) \quad (3)$$

ここに G はせん断弾性係数であり、 ν はポアソン比によって次式で与えられる弾性定数である。

*機械工学科

平成10年8月25日受理

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & (\text{平面応力}) \\ 3-4\nu & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \quad (4)$$

また応力の極座標成分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \sigma_\theta + \sigma_r &= 4 \operatorname{Re}[\varphi'(z)] \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 2e^{2i\theta}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \end{aligned} \quad (5)$$

本研究では、Fig. 1に示す長方形配置の円孔群をもつ無限体の引張りについて解析する。円孔の半径を a とし、円孔群の一つの中心に原点をとった座標系 Oxy を図のように定める。 x 方向および y 方向の円孔の間隔を与えるパラメータを b, c とし、 y 方向に作用する平均応力を σ とする。

解析には問題の対称性を考慮した適当な単位領域を考え、 x, y 両軸に関する対称条件と円孔縁自由の条件を満たす応力関数を導き、その中の未知係数を単位領域外周の境界条件から定める方法をとった。この単位領域としては Fig. 1の長方形領域 ODHKO を用いた。

さてこの問題に対する複素応力関数は次の展開形で表すことができる。

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (K_{2n} z^{2n+1} + F_{2n} z^{-2n-1}) \\ \psi'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (L_{2n} z^{2n+1} + H_{2n} z^{-2n-1}) \end{aligned} \quad (6)$$

ここに式中の展開係数はすべて実数であり、また z の奇数次項のみを含むことによって、これらは x, y 両軸に関する対称条件を満たしている。

次に円孔縁自由条件について考える。円孔縁 ($r=a$) では θ に関係なく $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ である。従って、複素応力関数(6)の係数間に次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} H_0 &= -2a^2 K_0 \\ H_{2n} &= -(2n)^2 a^{4n+2} K_{2n} - (2n-1) a^{4n} L_{2n-2} \\ F_{2n-2} &= (2n+1) a^{4n} K_{2n} - a^{4n-2} L_{2n-2} \quad (n \geq 1) \end{aligned} \quad (7)$$

式(7)は負べき項の係数 F_{2n}, H_{2n} を正べき項の係数 K_{2n}, L_{2n} で表している。式(7)を式(6)に代入すれば円孔縁自由の条件を厳密に満たす複素応力関数が得られ、含まれる未知係数は K_{2n}, L_{2n} だけとなる。

2.2 解析領域外周の境界条件と未知係数の決定

本節では、単位領域 ODHKO の境界条件を考え、これらを合力と変位に基づく境界分割法^{(5), (6), (7)}によって未知係数 K_{2n}, L_{2n} を精度よく定める方法について述べる。

まず、Fig. 2に示した辺 DH を N_1 個の等区間に辺 HK を N_2 個の等区間に分割する。そしてそれらの分点を Q_j ($j=1, 2, \dots, N+1; N=N_1+N_2$) とすれば、辺 DH, HK の境界条件は次のようになる。

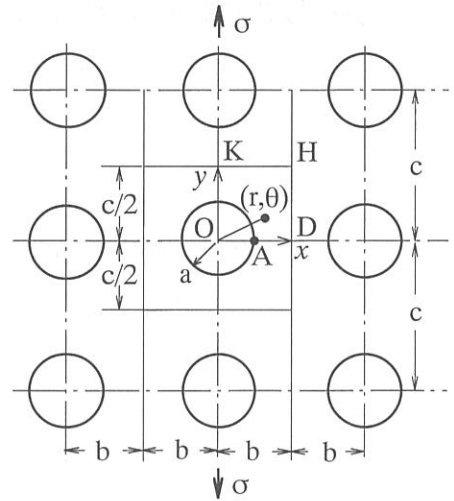


Fig. 1 Rectangular array of circular holes

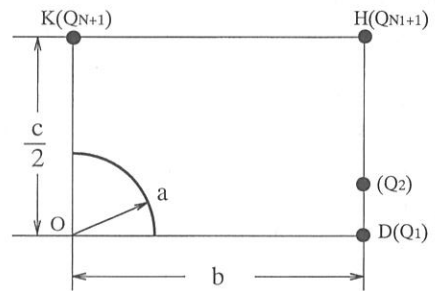


Fig. 2 Rectangular unit region

辺 DH の条件：

応力状態の対称性から辺 DH に沿ってせん断応力は零で法線変位 u は一定である。これらは各区間の合力と変位によって次式で置きかえられる。

$$\begin{aligned} [P_y]_j &= 0 \quad (j=1, 2, \dots, N_1) \\ [u]_{j+1} - [u]_j &= 0 \quad (j=1, 2, \dots, N_1-1) \end{aligned} \quad (8)$$

ここに j は区間番号である。 $[P_y]_j$ としては式(3)の実数部分について点 Q_{j+1} と Q_j における値の差をとればよく、 $[u]_j$ としては式(2)の実数部分について点 Q_{j+1} と Q_j における値の平均値を用いた。すなわち、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} [P_y] &= P_{y, Q_{j+1}} - P_{y, Q_j} \\ [u]_j &= (u_{Q_{j+1}} + u_{Q_j})/2 \quad (j=1, 2, \dots, N_1) \end{aligned} \quad (9)$$

辺 HK の条件：

辺 HK に関しても応力状態は対称なので、式(8)と類似

の次の関係が成立つ。

$$[P_x]_j = 0 \quad (j = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N)$$

$$[v]_{j+1} - [v]_j = 0 \quad (j = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N - 1) \quad (10)$$

ここに, $[P_x]_j, [v]_j$ は式(8)と同様に次の関係式を用いた。

$$\begin{aligned} [P_x]_j &= P_{x, q_{j+1}} - P_{x, q_j} \\ [v]_j &= (v_{q_{j+1}} + v_{q_j})/2 \quad (j = N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, N) \end{aligned} \quad (11)$$

さらに外荷重の条件は次式で与えられる。

$$[P_x]_0 = 0, [P_y]_0 = \sigma \cdot b \quad (12)$$

以上により境界条件の数は式(8), (10), (12)の $2N$ 個となる。これに対応して式(6)の未知係数としては $K_{2n} (n \leq N - 1)$, $L_{2n} (n \leq N - 1)$ を残し, これらより高次の項を零と置く。そして境界条件式を解いて K_{2n}, L_{2n} を定め, 応力や変位等の必要な物理量を求めた。

3. 解析結果

3.1 計算した物理量と結果の精度

計算結果には Fig. 1 における a, b, c の比だけが関係するので, 本質的な 2 個のパラメータとして次の μ, λ を用いた。

$$\mu = \frac{b}{c}, \lambda = \frac{a}{b} \quad (13)$$

また結果の整理に際して, 必要に応じて次の量を用いた。

$$f = \frac{\pi a^2}{2bc} = \frac{\pi}{2} \lambda^2 \mu \quad (14)$$

ここに f は円孔が全領域に占める割合(面積率)で, 次に述べる引張剛性係数と重要な関係がある。

本研究では, 円孔縁に沿う接線応力 σ_θ と次式で定義される引張剛性係数を求めた。

$$\begin{aligned} C &= \frac{E^*}{E_0} \\ E^* &= \text{円孔群がある場合の縦弾性係数} \\ E_0 &= \text{穴のない弾性体の縦弾性係数} \\ &= \begin{cases} E & (\text{平面応力}) \\ E/(1-\nu^2) & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

ここに E は母材の薄板試験片で測定した縦弾性係数である。 E^* と E_0 は平面応力と平面ひずみで異なり, またポアソン比 ν の値によって異なる値をとる。しかし, 両者の比で定義される引張剛性係数 C は応力分布と同様に, 平面応力と平面ひずみに関係なく, また ν の値にも関係しない。

Table 1 Variations of results with subdivision numbers ($c/b=2.0, a/b=0.5$)

N	σ_A/σ	C
4	3.2269	0.6306
8	3.2779	0.6168
12	3.2779	0.6168
24	3.2779	0.6168

Table 2 Dimensionless stress σ_A/σ

λ	μ								
	0	0.25	0.33	0.5	0.56	0.63	0.71	0.83	1.0
0.0	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000
0.05	3.000	3.001	3.001	3.000	2.998	2.996	2.992	2.984	2.971
0.10	3.000	3.004	3.005	2.999	2.994	2.984	2.968	2.941	2.893
0.15	3.002	3.010	3.011	3.000	2.988	2.969	2.937	2.883	2.795
0.20	3.006	3.019	3.022	3.003	2.985	2.956	2.907	2.828	2.708
0.25	3.015	3.033	3.036	3.012	2.989	2.950	2.887	2.792	2.658
0.30	3.031	3.052	3.058	3.030	3.003	2.958	2.889	2.788	2.656
0.35	3.056	3.081	3.088	3.061	3.033	2.987	2.918	2.822	2.701
0.40	3.096	3.122	3.130	3.108	3.084	3.043	2.981	2.897	2.786
0.45	3.155	3.181	3.190	3.178	3.160	3.129	3.080	3.010	
0.50	3.241	3.265	3.275	3.278	3.269	3.250	3.217	3.162	
0.55	3.366	3.386	3.396	3.416	3.417	3.412	3.395		
0.60	3.546	3.562	3.572	3.608	3.618	3.625	3.623		
0.65	3.811	3.822	3.831	3.876	3.892	3.908			
0.70	4.204	4.210	4.218	4.262	4.280	4.300			
0.75	4.803	4.805	4.810	4.844	4.858				
0.80	5.756	5.756	5.758	5.774					

Table 3 Stress concentration factor α

λ	μ								
	0	0.25	0.33	0.5	0.56	0.63	0.71	0.83	1.0
0.0	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000	3.000
0.05	2.850	2.851	2.851	2.850	2.848	2.846	2.842	2.835	2.822
0.10	2.700	2.704	2.704	2.699	2.694	2.686	2.672	2.647	2.604
0.15	2.552	2.558	2.560	2.550	2.540	2.524	2.496	2.451	2.376
0.20	2.405	2.415	2.417	2.402	2.388	2.365	2.325	2.263	2.167
0.25	2.261	2.274	2.277	2.259	2.242	2.212	2.165	2.095	1.994
0.30	2.122	2.137	2.140	2.121	2.102	2.071	2.022	1.951	1.859
0.35	1.986	2.003	2.007	1.989	1.971	1.942	1.897	1.834	1.756
0.40	1.858	1.873	1.878	1.856	1.850	1.826	1.789	1.738	1.672
0.45	1.735	1.749	1.754	1.748	1.738	1.721	1.694	1.655	
0.50	1.621	1.632	1.637	1.639	1.634	1.625	1.609	1.581	
0.55	1.515	1.524	1.528	1.537	1.538	1.535	1.528		
0.60	1.418	1.425	1.429	1.443	1.447	1.450	1.449		
0.65	1.334	1.338	1.341	1.357	1.362	1.368			
0.70	1.261	1.263	1.256	1.279	1.284	1.290			
0.75	1.201	1.201	1.203	1.211	1.215				
0.80	1.151	1.151	1.152	1.155					

さて本解析による結果の精度は、単位領域外周の分割数を増すときの値の変動を調べることによって推定することができる。Table 1は、 $c/b=2.0$ $a/b=0.5$ に対する円孔縁の点Aの接線応力 σ_A/σ と引張剛性係数 C の値を示したものである。ここに N は辺 DH, HK の分割数である。 σ_A/σ および C はいずれも N の増加で有効数字 4 桁まで安定している。以下に述べる数値結果は、全て Table 1 のような検討によって十分正しいことを確かめてある。

3.2 応力集中係数とその計算式

数値計算は、 $\mu=0.25, 0.33, 0.5, 0.56, 0.63, 0.71, 0.83, 1.0$ と 0.05 間隔の λ の 107 の組合せについて行った。

最大応力は引張方向に直角な孔軸端 A (Fig. 1) に生ずる。種々の μ, λ について得た点 A の応力 σ_A/σ の値を Table 2 に示す。表中の $\mu=0$ に対する値は一系列円孔群の特別な解析による結果⁽⁴⁾である。

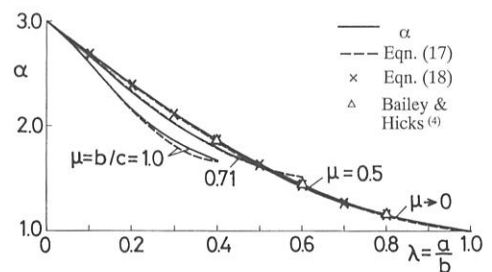
以上の結果から次式で定義した応力集中係数 α を求めた。

$$\alpha = (1 - \lambda) \frac{\sigma_A}{\sigma} \quad (16)$$

Table 3は、種々の μ, λ に対する応力集中係数 α を示したものである。

Fig. 3は、こうして得た応力集中係数 α を λ を横軸にとり μ をパラメータとして実線で描いたものである。

さて α は μ のいずれの場合も λ の増大とともに単調に減少し、 $\lambda \rightarrow 1$ の極限で $\alpha \rightarrow 1$ になる。図中の三角印は

Fig. 3 α, λ -relations

Bailey 等による正方形配置 ($\mu=0.5$) の結果⁽⁴⁾を論文中のグラフから読み取って示したものであり、 $\lambda \leq 0.8$ の全範囲で α と良く一致している。

さて本解析では、107個の μ, λ の組合せについて計算を行った。しかしそれでも、任意の μ, λ に対する値を求めようとすると、二変数について内挿をせねばならず、結果の精度も低下する。そこで最小二乗法を用いて、 α の解析値に良く適合するべき級数表示を求めた。その際、応力集中係数 α は $\lambda \rightarrow 0$ で $\alpha \rightarrow 3$ となることおよび提案する式が $\mu \rightarrow 0$ の極限で特別に求めた一系列円孔群に対する結果と一致するようにした。

上の方針に基づいて次の諸式(17), (18)を得た。式(17)は μ, λ が一般の場合の式であり、式(18)は正方形配置に対する精度の高い計算式である。なおこれらの式及び次節に提案する引張剛性の諸式の末尾括弧内には、解析値と計算

式による値の相対誤差(%)を平均誤差として示している。

穴の配置が一般の場合：

$$\begin{aligned} \alpha = & 1 + (1 - \lambda)(2\lambda - \lambda^2 - \lambda^3 + 2.583\lambda^4 - 1.193\lambda^5) \\ & + (1 - \lambda)\lambda^2\mu[2.214 + 4.142\mu - 19.880\mu^2 \\ & + \lambda(-0.007 - 24.021\mu + 52.737\mu^2)] \end{aligned} \quad (17)$$

(平均誤差0.6%)

正方形配置 ($\mu=0.5$)：

$$\begin{aligned} (\alpha)_{\mu=0.5} = & (1 - \lambda) \left[3 + \frac{\lambda}{1 - \lambda} (0.019 - 0.590\lambda \right. \\ & \left. + 3.195\lambda^2 - 2.333\lambda^3 + 0.718\lambda^4) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

(平均誤差0.05%)

各式の末尾括弧内に示した平均誤差からわかるようにす

べて精度は十分である。

Fig. 3には、 α_A の式(17)による値を破線で描いている。提案する計算式は、解析値と良い一致を示しており、実用上有用と考えられる。また、穴の正方形配置の式(18)による結果はほとんど解析曲線上にあり、精度が極めて高いことがわかる。

3.3 引張剛性係数とその計算式

単位領域の辺HKの中点のy方向変位から有孔弾性体の縦弾性係数 E^* が定まり、式(15)の引張剛性係数 C が求められる。

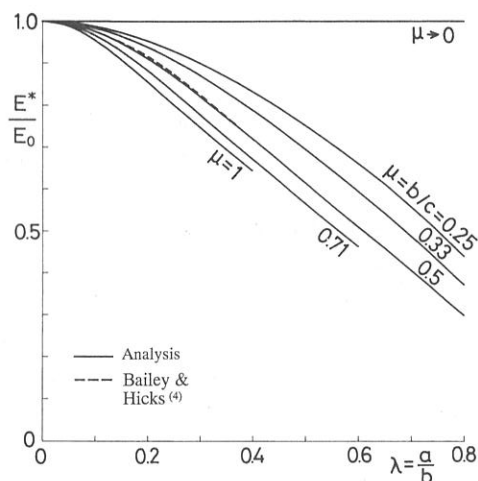
種々の μ と λ に対する C の計算結果をTable 4およびFig. 4に示す。図中の破線はBailey等による正方形配置

Table 4 Tensile stiffness factor C for various μ and λ

λ	μ							
	0.25	0.33	0.5	0.56	0.63	0.71	0.83	1.0
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.05	0.997	0.996	0.994	0.994	0.993	0.992	0.990	0.989
0.10	0.988	0.985	0.977	0.975	0.972	0.968	0.963	0.957
0.15	0.974	0.966	0.950	0.945	0.939	0.931	0.922	0.911
0.20	0.955	0.940	0.914	0.906	0.897	0.886	0.873	0.859
0.25	0.931	0.910	0.872	0.861	0.848	0.835	0.820	0.804
0.30	0.902	0.874	0.824	0.811	0.796	0.781	0.766	0.751
0.35	0.870	0.834	0.774	0.759	0.743	0.727	0.712	0.698
0.40	0.835	0.791	0.722	0.706	0.689	0.673	0.659	0.645
0.45	0.796	0.746	0.670	0.653	0.636	0.620	0.606	
0.50	0.755	0.698	0.617	0.600	0.583	0.568	0.554	
0.55	0.710	0.648	0.564	0.547	0.531	0.516		
0.60	0.663	0.597	0.512	0.495	0.479	0.465		
0.65	0.613	0.543	0.459	0.443	0.428			
0.70	0.559	0.489	0.407	0.391	0.376			
0.75	0.502	0.432	0.354	0.339				
0.80	0.441	0.373	0.300					

Table 5 Tensile stiffness factor C for various μ and f

f	μ							
	0.25	0.33	0.5	0.56	0.63	0.71	0.83	1.0
0.0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.05	0.866	0.867	0.869	0.871	0.872	0.875	0.878	0.882
0.10	0.751	0.758	0.767	0.771	0.776	0.783	0.791	0.802
0.15	0.645	0.663	0.683	0.690	0.699	0.710	0.724	0.741
0.20	0.544	0.578	0.612	0.622	0.635	0.650	0.668	0.691
0.25	0.443	0.499	0.549	0.563	0.578	0.597	0.620	0.646
0.30		0.424	0.493	0.509	0.528	0.550	0.576	
0.35			0.441	0.461	0.482	0.507		
0.40			0.393	0.415	0.440			
0.45			0.347	0.372				
0.50			0.302					

Fig. 4 C, λ -relations

の結果⁽⁴⁾であり、本解析値と良い一致が認められる。また $\mu \rightarrow 0$ (一列円孔群) では λ に関係なく $C=1$ であり、 μ が増すほど、また λ が大きいほど C が著しく低下する。

また C は式(14)で定義される面積率 f による整理も行われている。本研究でも μ と f をパラメータとして計算を行い Table 5 を得た。これらの結果を f を横軸として示せば Fig. 5 を得る。先に著者らが示した千鳥配列の結果^{(1), (3)} に比べると C と f との相関は劣るが、 $f < 0.2$ の範囲に限れば C と f との良い相関が認められる。

上の所見に基づいて、 C の解析値を μ, f によるべき級数で近似した。その際、 $f=0$ のとき $C=1$ となることを考慮して、穴の配置が一般の場合の式および正方形配置に対するさらに精度の高い式を次のように求めた。

穴の配置が一般の場合：

$$C = 1 + f[-3.015 + 7.380f - 44.002f^2 + 79.520f^3 + \mu(0.130 - 4.792f + 114.79f^2 - 245.25f^3) + \mu^2(-0.098 + 11.876f - 120.36f^2 + 230.21f^3)] \quad (19)$$

(平均誤差 0.4%)

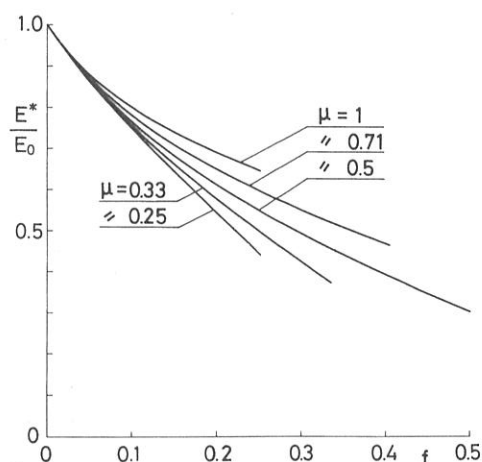
正方形配置の場合 ($\mu=0.5$)：

$$(C)_{\mu=0.5} = 1 - 2.935f + 7.204f^2 - 13.009f^3 + 9.553f^4 \quad (20)$$

(平均誤差 0.3%)

4. 結 論

(1) 長方形配置の円孔群をもつ無限体の引張りについて適当な単位領域を考え、複素応力関数の Laurent 展開法と合力と変位に基づく境界分割法を用いて精度良く解析した。 μ, λ の幾何学パラメータの組合せについて数値計算を行い、円孔縁応力と有孔弾性体の縦弾性係数を求め

Fig. 5 C, f -relations

た。

- (2) 最大応力は、引張方向に直角な円孔縁の点 A に生じる。また応力の解析結果から応力集中係数 α を求めた。
- (3) 穴の存在は弾性体の引張剛性を低下させる。引張剛性係数 C は $f < 0.2$ の範囲に限れば面積率 f と良い相関が認められる。
- (4) 応力集中係数 α と引張剛性係数 C の解析値に良く適合する計算式をべき級数の形で与えた。これらによってパラメータの任意の組合せに対する結果が精度良く求められる。
- (5) 以上の結果は平面応力と平面ひずみに関係なく、 E, ν 等の弾性定数にも無関係である。

参考文献

- (1) 石田・井川, 日本機械学会論文集, **54 A** (1988), 1495.
- (2) 石田・井川, 久留米工業大学研究報告, **No. 9** (1985), 29.
- (3) 石田・井川, 久留米工業大学研究報告, **No. 11** (1987), 31.
- (4) Bailey, R. and Hicks, R., J. Mech. Engg. Sci., **2** (1960), 143.
- (5) Isida, M., Int. J. Frac. Mech., **7** (1971), 301.
- (6) 石田・野口, 日本機械学会論文集, **48 A** (1982), 888.
- (7) 石田, 日本機械学会論文集, **48 A** (1982), 1239.
- (8) 石田, 日本機械学会論文集, **25** (1959), 1118.