

平行弦トラスの解法に関する考察

吉住 孝志*

A Study of Analytical Method for Parallel-Chord Trusses

Takashi YOSHIKAZUMI

Abstract

Parallel-chord trusses are often used for bridges and building structures. The method of joints or the method of sections is usually applied in analyzing the statically determinate plane trusses. It is, however, not always easy to calculate the bar forces of a truss, because of a number of bars hinged together. In the case of a parallel-chord truss composed of the same type of panels (or triangles), it may be presumed that such a structure has particular characteristics in mechanics.

In this paper, the properties of parallel-chord trusses are discussed and a convenient analytical method based on the method of joints is proposed.

Keywords: parallel-chord truss, method of joints, convenient analytical method

1. はじめに

静定な平面トラスの解析には、一般に、「節点法」や「切断法」が用いられる。節点法は、トラスの各節点において力の釣合い式 ($\Sigma X=0, \Sigma Y=0$) を立てることにより部材軸力を求める方法である。一方、切断法は、特定部材の軸力計算に対して効率的で有効な解法である。また、比較的短時間で略算値を求める方法としては、節点法の図式解法(示力図が閉じる)である「クレモナ図解法」がある。

トラス構造は、一般的に非常に多くの部材から構成されているので、すべての部材軸力を計算するには多大な時間と労力を要する。平行弦トラスのように同様のパネル形状(三角形)からなるような構造では、その幾何学的形状により、特徴のある力学的性質をもつことが推測される。

本報告では、平行弦トラスの力学的性質について考察するとともに、その簡便な解法を提案することを目的とする。

2. 単純な平行弦トラスの軸力に関する考察と簡便解法

Fig.1 および Fig.2 に示すような、単純な平行弦トラスについて考察する。Fig.1 および Fig.2 では、便宜上、節点荷重および反力の単位を省略している。

Fig.1 および Fig.2 に示すような折れ曲がりのない一般的な平行弦トラスにおける束材(鉛直材)と斜材および束材と弦材との軸力の関係について考察する。Fig.3-1)に示すように、ある節点に力 N_1, N_2, N_3 が作用して釣

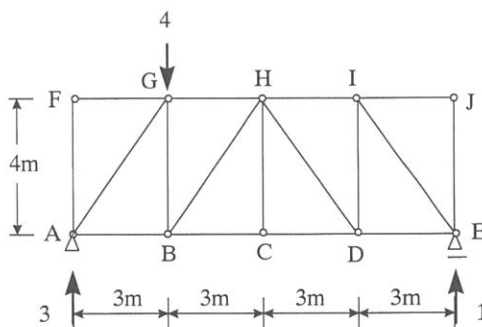


Fig. 1 Simple parallel-chord truss (Truss 1)

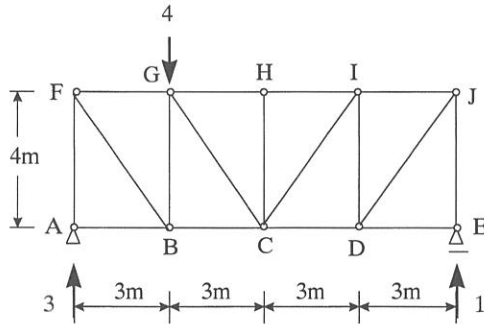


Fig. 2 Simple parallel-chord truss (Truss 2)

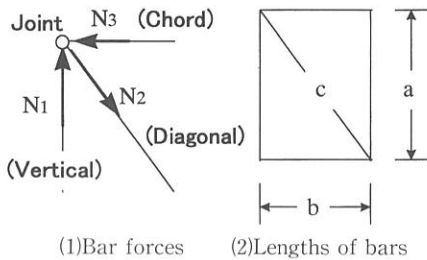


Fig. 3 Bar forces and shape of panel

合っているものとする。東材の軸力 N_1 [鉛直上向き] に対して、鉛直方向の力の釣合いを考える。斜材の軸力 N_2 は、パネル形状 [Fig.3-(2)] を参照すれば、斜め右下方向に $N_2 = N_1 \times (c/a)$ [a: 東材長さ, c: 斜材長さ] となる。次に、斜め右下向きの斜材の軸力の水平方向分力は水平右向きだから、弦材 (水平材) の軸力 N_3 は、水平方向の釣合いを保つためには、水平左向きに $N_3 = N_2 \times (b/c) = N_1 \times (c/a) \times (b/c) = N_1 \times (b/a)$ [b: 弦材長さ] となる。したがって、各軸力は、鉛直方向の力 N_1 を用いて次のように表すことができる。

- 東材軸力: $N_1 \times (a/a) = N_1 \times (1)$ [鉛直上向き]
- 斜材軸力: $N_2 = N_1 \times (c/a)$ [斜め右下向き] ……(I)
- 弦材軸力: $N_3 = N_1 \times (b/a)$ [水平左向き]

つまり、斜材軸力は、東材 (鉛直材) の軸力に乗数 c/a [(斜材長さ) / (東材長さ)] を掛けることにより、また弦材軸力は、東材 (鉛直材) 軸力に乗数 b/a [(弦材長さ) / (東材長さ)] を掛けることにより求めることができる。この性質を利用して、先ず、東材 (鉛直) 方向の分力だけを基準に、その大きさと向きを考慮に入れながら、節点での東材方向の釣合いより、仮の東材および斜材軸力を求める。その後、斜材の弦材 (水平) 方向分力

と釣合うように仮の弦材軸力を求める。このようにして求められた仮の軸力を、以後「見かけの軸力」と呼ぶことにする。そして、最後に、(I)式に示す括弧内の乗数をかければ、軸力 (以後「真の軸力」と呼ぶことにする) が得られる (Fig.4 参照)。さて、この方法を実際の問題

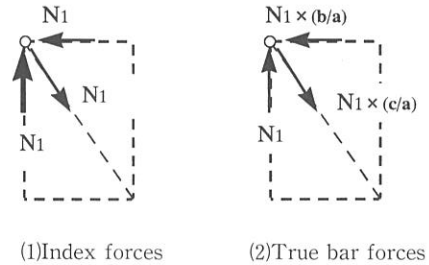


Fig. 4 Index forces and true bar forces

に適用してみる。その適用例として、Fig.1 の平行弦トラス (トラス 1) を用いる。

トラスの解析に入る前に、軸力がゼロ (0) の部材について考察する。Fig.5 に示すように 0 印の部材は、節点

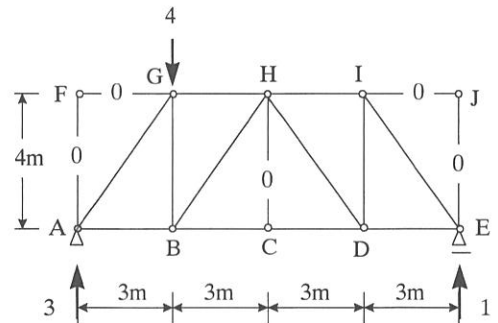


Fig. 5 Non-stress bars

F, C および J における力の釣合いから、軸力が 0 になることは明らかである。節点 A および節点 G を例にとって力の釣合いを考える (Fig.6 参照)。

①【節点 A における見かけの力の釣合い】

上向き反力 3 に対して斜材の分力が下向きに 3 の力で釣合う。また、斜材の水平分力は左に 3 なので、釣合うための弦材の見かけの軸力は右に 3 となる。釣合うための見かけの軸力は括弧付きの数字となる。

軸力が節点方向を向いているときは圧縮軸力、節点から離れる方向を向いているときは引張軸力となる。した

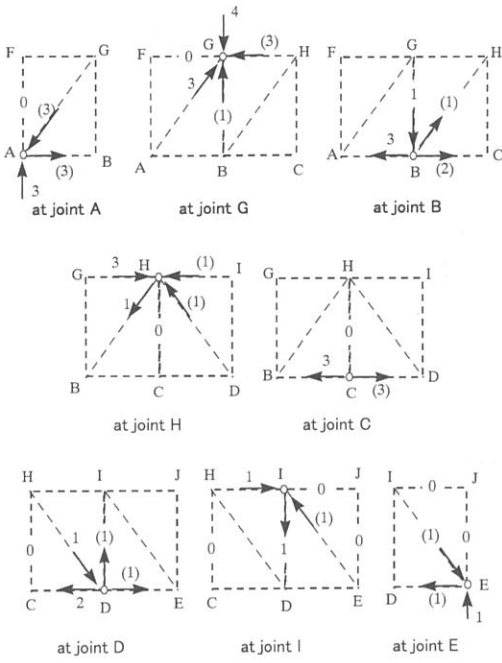


Fig. 6 Equilibrium of index forces

がって、AG 材は圧縮、AB 材は引張である。

②【節点Gにおける見かけの力の釣合い】

節点Gにおける東材方向の見かけの力の釣合いを考える。斜材GAは圧縮軸力だから、節点Gでは節点方向(斜め右上がり)に3の力が働くことになる。東材方向の釣合いから、下向きの節点荷重4と斜材GAの東材方向分力(上向き)3との差し引き勘定から、部材GBの見かけの軸力は上向きに1となる。次に、弦材方向の釣合いから、斜材GAの弦材方向分力が右に3となるので、弦材GHの見かけの軸力は左に3となる。材GBおよび材GHの軸力は、両材とも考えている節点G方向を向いているので、共に圧縮軸力となる。他の節点(B, H, C, D, I, E)についても同様の処理を行ってゆくと、Fig.7に示すような見かけの軸力が得られる。このようにして求められた見かけの軸力に、乗数(東材の長さを1としたときの他の材の長さの比: 東材: 1, 斜材: 5/4, 弦材: 3/4)をかければ、真の部材軸力(Fig.8参照)が得られる。参考のため、Fig.9に軸力の状態(引張・圧縮)を示す。以上が一般的な平行弦トラスの簡便な解法である。このように、同一パネルからなり、横力が作用する平行弦トラスを解くのに、上述の方法は非常に有効である。しかしながら、各節点において東材(鉛直)方向の

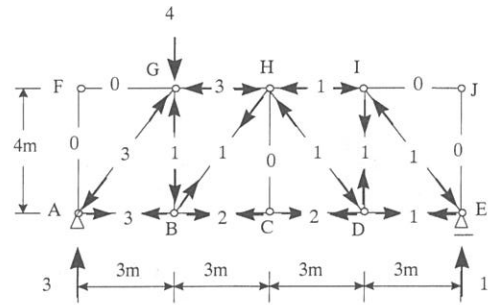


Fig. 7 Index forces in Truss 1

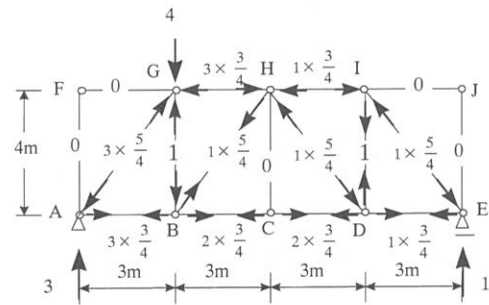


Fig. 8 True bar forces in Truss 1

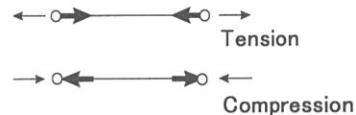


Fig. 9 Stress in a bar

釣合いと弦材(水平)方向の釣合いを順次行ってゆくのもよいが、機械的に計算を進め、かつ計算ミスを回避するためには、次の手順で計算を進めるほうが賢明である。

- ① 外力が規定されている支点側から各節点において東材方向の釣合いより、先に東材(鉛直材)および斜材の見かけの軸力をすべて求める。
- ② 次に、外力が規定されている支点側から斜材の弦材方向分力との釣合いより、弦材(水平材)の見かけの軸力を求める。
- ③ 見かけの軸力に乗数(東材長さを1としたときの斜材および弦材長さの比)をかけて真の軸力を求める。

Fig. 2のトラス2についても同様の処理を行えば簡単に軸力を求めることができる。この場合の見かけの軸力

を Fig.10, 真の軸力を Fig.11 に示す。文献(1)に同様の解

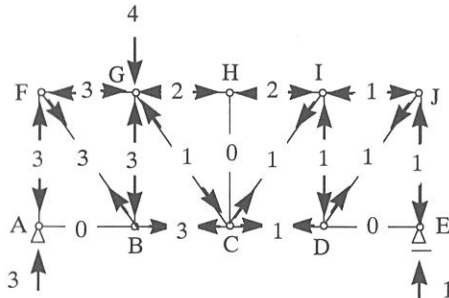


Fig. 10 Index forces in Truss 2

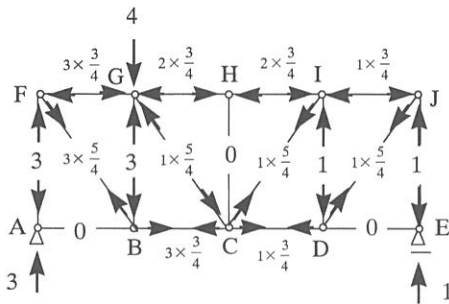


Fig. 11 True bar forces in Truss 2

法が例題を用いて示されている。この文献では、ここでいう見かけの軸力を Index force, このような解法を Index force method と呼んでいる。次節以降に示す傾斜したもや折れ曲がりのある平行弦トラスの解法は、いわば本節の方法の拡張ともいえる。

3. 傾斜した平行弦トラスの軸力計算

Fig.1 や Fig.2 に示すような一般的な(単純な)平行弦トラスの場合、その基本となる三角形は直角三角形であるので、辺の長さを簡単に求めることができ、見かけの軸力に乗じる係数(乗数)を容易に得ることができた。しかしながら、Fig.12 に示すようなトラスの場合、基本となる三角形が直角三角形とはならないため、辺の長さを求めるには多少の労力が必要となるが、弦材が傾斜していない場合と同様の方法で簡単に軸力を求めることができる。なぜなら、節点における力の釣合いは、直交座標系においても斜交座標系においても $\sum X = 0, \sum Y = 0$ が成り立てばよいからである。Fig.13 に見かけの軸力にかける乗数を示す。Fig.14 に軸力ゼロの部材および見か

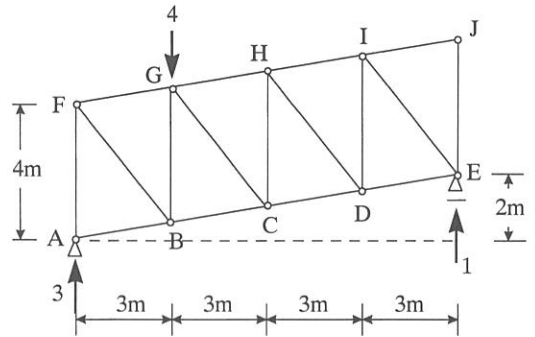


Fig. 12 Inclined truss (Truss 3)

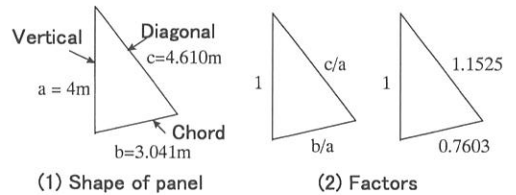


Fig. 13 Factor for each bar

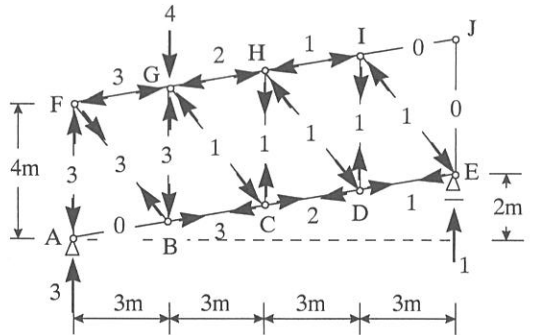


Fig. 14 Index forces in Truss 3

けの軸力を Fig.15 に真の軸力を示す。

4. 折れ曲がりのある平行弦トラスの軸力計算(その1)

Fig.16 に示すような折れ曲がり(ライズ)のある平行弦トラスの場合も、これまでと同様の方法で簡単に解くことができるが、注意すべき点が1つある。それは折れ曲がり部の束材(HC材)の軸力計算である。ライズのある平行弦トラスの簡便な解法手順を以下に示す。

【解法の手順】

- ① ゼロ部材および折れ曲がり部の束材を境に、左右端から見かけの軸力を求める(Fig.17 参照)。ただし、折

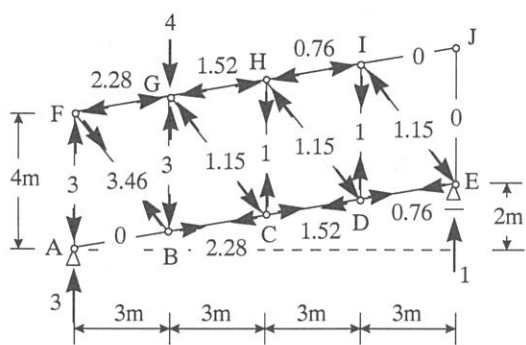


Fig. 15 True bar forces in Truss 3

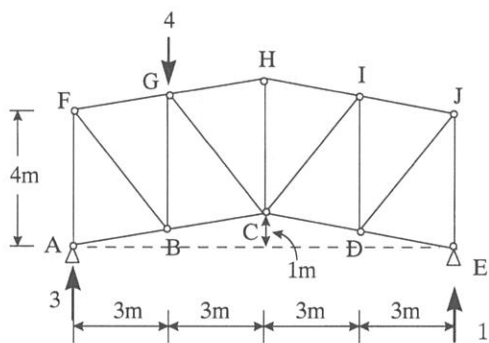


Fig. 16 Truss with a rise (Truss 4)

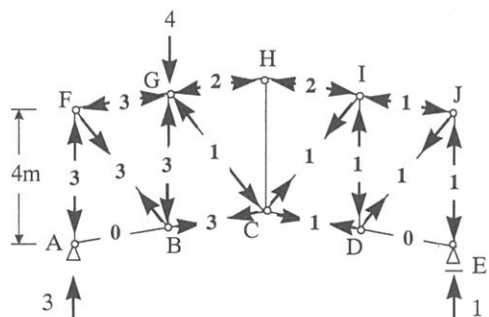


Fig. 17 Index forces in Truss 4

れ曲がり部の東材を除く。

- ② 折れ曲がり部の東材のいずれか一方の節点に関して、鉛直方向の力の釣合いより東材の軸力を求める。
- ③ 見かけの軸力に乗数をかけて真の軸力を求める。

処理②の折れ曲がり部の東材軸力を見かけの軸力を用いて求める方法を以下に示す。ここでは、接合部材数の少ない節点Hに関する力の釣合いを考える。

折れ曲がり部の東材の節点Hに取り付く弦材HGお

よび弦材HIの見かけの軸力を N' とすると、真の軸力 N は $N' \times (b/a)$ で表わされる。HG材あるいはHI材の真の軸力 N の東材方向の分力 Nv は $N \times (v/b) = N' \times (b/a) \times (v/b) = N' \times (v/a) = 2 \times (0.5/4) = 0.25$ となる (Fig.18 参照)。つまり、弦材HGおよび弦材HIの東材

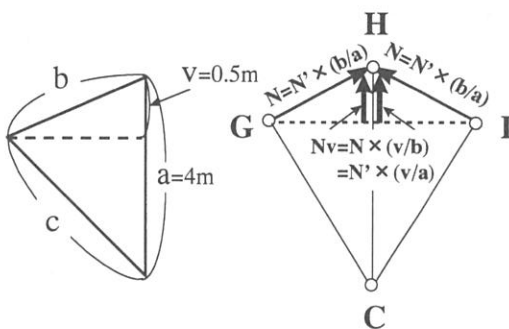


Fig. 18 Vertical components of upper chord forces at joint H

方向の分力は共に上向きで見かけの軸力 $N' (= 2)$ に $v/a (= 0.5/4)$ を乗じた値となる。東材方向の釣合いから、折れ曲がり部の東材HCの軸力 N_{HC} は鉛直下向きに $N_{HC} = 2 \times Nv = 2 \times N' \times (v/a) = 0.5$ [引張]となる。したがって、トラス4の真の軸力は、Fig.17の見かけの軸力にFig.13の乗数をかけると、Fig.19に示す真の軸力が

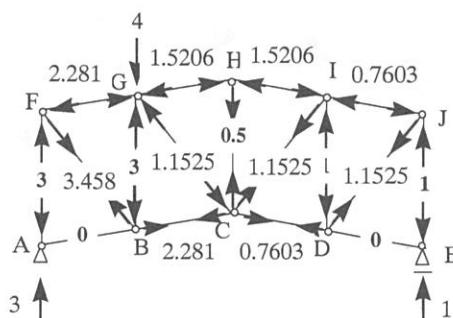


Fig. 19 True bar forces in Truss 4

得られる。

5. 折れ曲がりのある平行弦トラスの軸力計算 (その2)

4節までのトラスは同一パネル (三角形) からなる平行弦トラスの問題であった。ここでは、Fig.20に示すよ

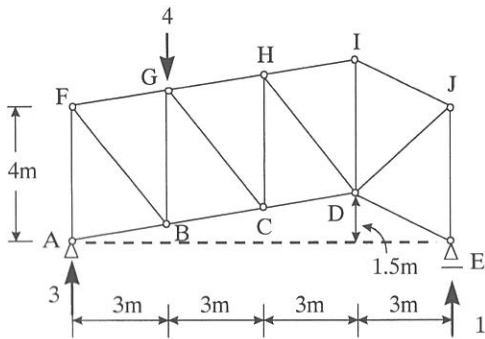


Fig. 20 Truss composed of different panels (Truss 5)

うに異なる種類のパネルからなるライズのある平行弦トラスについて考察する。このようなトラスの場合も、基本的にはこれまでと同様の解法手順で計算してゆけばよい。注意すべき点は、(1)折れ曲がり部の束材の左右のパネル形状が異なるため、それぞれの側で見かけの軸力に乗ずる係数が異なることと、(2)折れ曲がり部の束材に取り付く弦材軸力の束材方向の分力の計算が異なることである。束材 ID を除くトラス 5 の見かけの軸力およびゼロ部材を Fig.21 に示す。注意すべき点の(1)については、

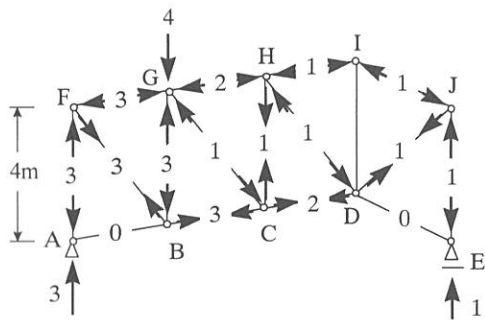
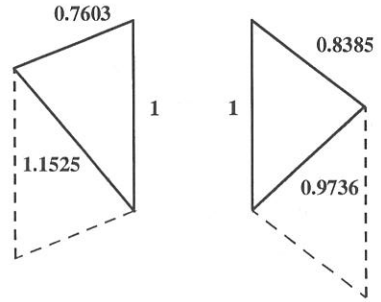


Fig. 21 Index forces in truss 5

左右 2 種類の三角形の各辺の長さを求め、鉛直材に対する長さを基本 (= 1) としたときの他の辺の比率を求めればよい (Fig.22 参照)。(2)については、Fig.23 に示すように、折れ曲がり部の束材 ID の両側の三角形を参考にして、束材 ID の長さ $a (= 4 \text{ m})$ に対する IH 材の束材方向の投影長さ $V_1 (= 0.5 \text{ m})$ との比 $V_1/a (= 0.5/4)$ と束材 ID の長さ $a (= 4 \text{ m})$ に対する IJ 材の束材方向の投影長さ $V_2 (= 1.5 \text{ m})$ との比 $V_2/a (= 1.5/4)$ を求める。この係数をそれぞれの弦材 (IH 材および IJ 材) の見かけの軸力 (N_1 および N_2) に乗じて足し合せれば、節点 I にお



(1)Factor to the left (2)Factor to the right

Fig. 22 Factors to the left and to the right of the vertical ID

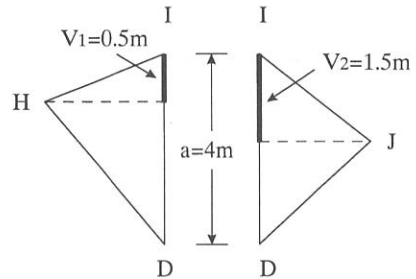


Fig. 23 Vertical components of chords IH and IJ in length

ける 2 部材の束材方向分力の合力 N_v が次式で得られる。

$$N_v = N_1 \times (V_1/a) + N_2 \times (V_2/a) \quad [a : \text{束材長さ}]$$

$$= 1 \times (0.5/4) + 1 \times (1.5/4) = 0.5 \quad (\text{鉛直上向き})$$

束材方向の力の釣合いより、折れ曲り部の束材 ID の軸力は鉛直下向きに 0.5 となり、引張軸力となる。ID 材以外の真の軸力は、Fig.21 の見かけの軸力に ID 材の左右のパネルに対する乗数をかけることにより得られる。

Fig.24 にトラス 5 の真の軸力を示す。

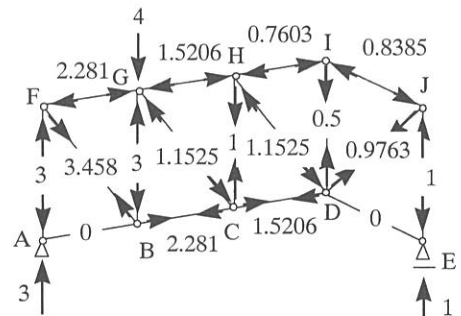


Fig. 24 True bar forces in Truss 5

6. 見かけの軸力に関する考察

折れ曲がりの有無に関わらず、Fig.2 および Fig.16 に示すように、腹材（束材，斜材）の架構形式が同じ平行弦トラスの見かけの軸力は、Fig.10 および Fig.17 から明らかなように、折れ曲がり部の束材を除けば、同じ値になる。したがって、折れ曲がりのあるトラスの見かけの軸力は、折れ曲がり部の束材以外は、折れ曲がりのない単純な平行弦トラスの見かけの軸力を参照すればよいことになる。この性質は非常に興味深い。

7. まとめ

本報告では、折れ曲がりのない単純な平行弦トラスお

よび折れ曲がりのある平行弦トラスの部材軸力の特性について考察するとともに、この特性を生かした平行弦トラスの簡便な解法を提案し、体系化した。本解法はパネル数が多くなるほど、その有効性が顕著に現れる特徴を持っている。

参考文献

- (1) C.H.Norris and B.W.Wilbur, "Elementary Structural Analysis (Second Edition)", McGraw-Hill Book Company, Inc., pp.151-152.