

周期配列の剛体扁平介在物群をもつ無限体の引張り

井川 秀信*・平野 貞三*・隈部 晃*

Tension of Infinite Solids Containing Periodic Arrays of Rigid Flat Inclusions

Hidenobu IGAWA, Teizou HIRANO and Akira KUMABE

Abstract

This paper is concerned with theoretical analyses of periodic arrays of rigid flat inclusions in solids under uniaxial tension. In the analyses, we choose suitable unit regions, and express the complex stress potentials in eigenfunction expansions in forms satisfying the continuity relations along the inclusion boundaries. The unknown coefficients are determined from the boundary conditions of the unit regions. At this stage, we use a new procedure based on element-wise resultant forces and displacements in order to get highly accurate results. Numerical results of the stress intensity and the tensile stiffnesses of the solids with the inclusions are given for various values of the parameters. The results of the tensile stiffnesses are fitted to reliable polynomial formulae for convenience of engineering applications.

Key Words: Two-Dimensional Elasticity, Tension, Rigid Flat Inclusions, Stress Intensity, Tensile Stiffness

1. 緒 言

近年、強化短繊維をプラスチック等の母材中に分散させた複合材料が機械構造物に多く用いられている。これらの材料は、軽量で強度が高い特徴があり、工業製品としての需要が高い。しかし、複合材料の設計では、いまだ経験に基づく方法が多く用いられており、明確な力学的根拠に基づく合理的な設計はなされていないようである。

そこで本研究では、前述の短繊維強化複合材料等の強度・剛性を評価する際のモデルとして周期配列の剛体扁平介在物群をもつ無限体の引張りについて解析したものである。解析には一個の剛体扁平介在物を含む適当な単位領域を考え、その領域に適合し、介在物の接合条件を完全に満たす複素応力関数の固有関数展開を仮定する。そしてこの単位領域外周の境界条件を合力と変位を用いて応力状態の二方向周期性を満足する形で表し、これら

によって展開の未知係数を定める。介在物の長さおよび介在物の相対位置の種々の組合せについて数値計算を行って、介在物先端の応力特異性の強さおよび介在物群の存在による弾性体の引張剛性の変化を調べる。さらに引張剛性係数の結果に適合する計算式を与える。

2. 解析方法

2. 1 複素応力関数

二次元弾性問題における合力と変位の成分は、複素応力関数 $\phi(z)$, $\Omega(z)$ によって次のように表される。

$$P_y + iP_x = - \int \overline{\phi(z)} d\bar{z} - \int \overline{\Omega(z)} dz + (z - \bar{z})\phi(z) \quad (1)$$

$$2G(u - iv) = x \int \overline{\phi(z)} d\bar{z} - \int \overline{\Omega(z)} dz + (z - \bar{z})\phi(z) \quad (2)$$

ここに G はせん断弾性係数であり、 x はポアソン比 ν によって次式で与えられる。

* 機械工学科
平成11年9月17日受理

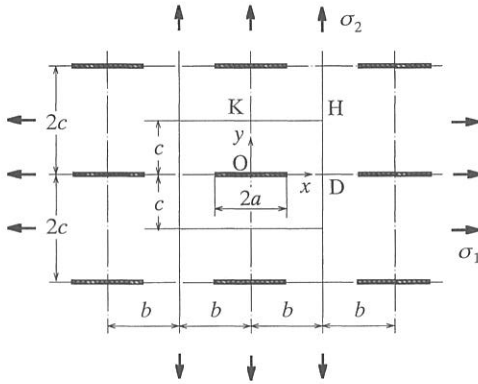


Fig. 1(a) Rectangular array of rigid flat inclusions

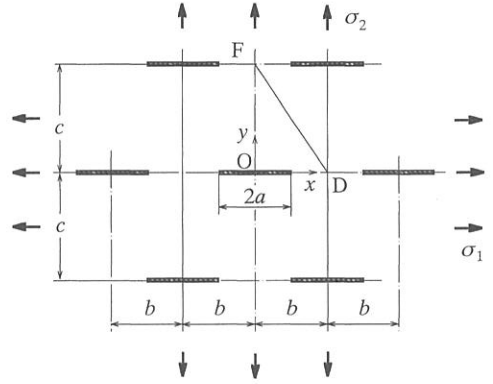


Fig. 1(b) Zig-zag array of rigid flat inclusions

$$\kappa = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & (\text{平面応力}) \\ 3-4\nu & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \quad (3)$$

本研究では次の二つの問題を統一的に解析する。

- (a) 長方形配置の剛体扁平介在物群をもつ無限体の引張り (Fig. 1(a))
- (b) 千鳥配置の剛体扁平介在物群をもつ無限体の引張り (Fig. 1(b))

両問題を通じて剛体扁平介在物の長さを $2a$ 、介在物の一つの中心に原点をとった座標系 Oxy を Fig. 1(a), (b) のように定める。そして x 方向および y 方向の介在物の間隔を与えるパラメータを b, c とし、 x 方向および y 方向に作用する平均応力をそれぞれ σ_1, σ_2 とする。

解析には適当な単位領域を考え、 x, y 両軸に関する応力状態の対称条件および剛体扁平介在物の接合条件を厳密に満たす複素応力関数を導き、その中の未知係数を単位領域外周の境界条件から定める方法をとった。この単位領域としては、問題(a)では長方形領域 ODHKO を用い、問題(b)では三角形領域 ODFO を用いた。

まずこれらの解析領域に適合する複素応力関数として次の固有関数展開を仮定する。

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{z^{2n-1}}{\sqrt{z^2-a^2}} + B_n z^{2n-2} \right) \\ \Omega(z) &= -\kappa \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{z^{2n-1}}{\sqrt{z^2-a^2}} - B_n z^{2n-2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

ここに展開係数 A_n, B_n は実数である。

式(4)は、応力状態が x, y 両軸に関して対称となる条件および介在物の接合面で変位 u, v が零となる条件を満たしている。計算では、次節で述べるように境界条件を有限個の条件に置き換えるので、それに対応して式(4)の級数も有限項に止めて解析することになる。

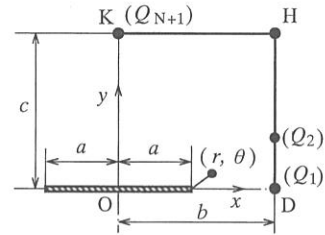


Fig. 2 Rectangular unit region

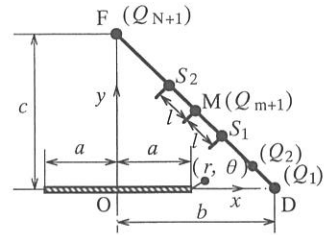


Fig. 3 Triangular unit region

2. 2 単位領域外周の境界条件と未知係数の決定

式(4)の未知係数 A_n, B_n は、単位領域の x, y 両軸以外の境界条件から定める。しかし、境界条件を辺上の全ての点で完全に満たすことは不可能なので、合力と変位に基づく境界分割法⁽¹⁾⁻⁽⁷⁾を適用した。両問題の境界条件表示は次のようになる。

(a) 長方形配置剛体扁平介在物群

Fig. 2のように長方形領域の辺DHを N_1 個の等区間に辺HKを N_2 個の等区間に分割し、分点を $Q_j (j=1, 2, \dots, N+1; N=N_1+N_2)$ とすれば、辺DH, HKの境界条件は次のようになる。

辺DHの条件：

応力状態の対称性から辺DHに沿ってせん断応力 τ_{xy}

は零、法線変位 u は一定である。これらは各区間の合力と変位によって次式で置き換えられる。

$$[P_y]_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N_1)$$

$$[u]_{j+1} - [u]_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, N_1-1) \quad (5)$$

ここに j は区間番号である。 $[P_y]_j$ としては式(5)を式(1)に用い、その実数部分について点 Q_{j+1} と Q_j における値の差をとればよく、 $[u]_j$ としては式(5)を式(2)に用いその実数部分について点 Q_{j+1} と Q_j における値の平均値を用いた。すなわち

$$[P_y]_j = P_{y, Q_{j+1}} - P_{y, Q_j}$$

$$[u]_j = (u_{Q_{j+1}} + u_{Q_j})/2 \quad (j=1, 2, \dots, N_1) \quad (6)$$

辺 HK の条件：

辺 HK に関しても応力状態は対称なので、式(5)と類似の次の関係が成り立つ。

$$[P_x]_j = 0 \quad (j=N_1+1, N_1+2, \dots, N)$$

$$[v]_{j+1} - [v]_j = 0 \quad (j=N_1+1, N_1+2, \dots, N-1) \quad (7)$$

ここに $[P_x]_j, [v]_j$ としては式(6)と同様に次式で与えられる。

$$[P_x]_j = P_{x, Q_{j+1}} - P_{x, Q_j}$$

$$[v]_j = (v_{Q_{j+1}} + v_{Q_j})/2 \quad (j=N_1+1, N_1+2, \dots, N) \quad (8)$$

さらに、この長方形領域に対する外荷重の条件は次式で与えられる。

$$[P_x]_0 = \sigma_1 c, [P_y]_0 = \sigma_2 b \quad (9)$$

(b) 千鳥配置剛体扁平介在物群

Fig. 3の三角形領域の斜辺 DF の中点を M とすると、応力状態の x 方向および y 方向の周期性から、点 M の両側で M から等距離 l にある二点 (S_1 と S_2) は同じ応力状態であり、またこれらの点 M に対する相対変位も同じである。そこで、斜辺 DF を偶数 N 個の等しい区間に分割し、分点を Q_t ($t=1, 2, \dots, N+1; N=2m$) とする。

まず、点 M から等距離にある分点 Q_t と Q_{2m+2-t} ($t=1, 2, \dots, m$) における等応力の条件は、次式で与えられる。

$$[P_x]_{Q_t}^{Q_{m+1}} = [P_x]_{Q_{m+1}}^{Q_{2m+2-t}}$$

$$[P_y]_{Q_t}^{Q_{m+1}} = [P_y]_{Q_{m+1}}^{Q_{2m+2-t}} \quad (t=1, 2, \dots, m; m=N/2) \quad (10)$$

また、点 M と点 Q_t の相対変位が点 Q_{2m+2-t} と点 M の相対変位に等しい条件は次式で与えられる。

$$[u]_{Q_t}^{Q_{m+1}} = [u]_{Q_{m+1}}^{Q_{2m+2-t}}$$

$$[v]_{Q_t}^{Q_{m+1}} = [v]_{Q_{m+1}}^{Q_{2m+2-t}} \quad (t=1, 2, \dots, m; m=N/2) \quad (11)$$

さらに、この三角形領域に対する外荷重の条件は次式で与えられる。

$$[P_x]_0 = \sigma_1 c, [P_y]_0 = \sigma_2 b \quad (12)$$

以上により境界条件の数は、問題(a)では式(5), (7), (9)の $2N$ 個、問題(b)では式(10), (11), (12)の $(2N+2)$ 個とな

る。これに対応して式(4)の未知係数としては、両問題に対してそれぞれ $A_n(n \leq N)$ と $B_n(n \leq N)$, $A_n(n \leq N+1)$ と $B_n(n \leq N+1)$ を残し、これらより高次の項を零と置く。そして境界条件式を解いて A_n, B_n を定めれば複素応力関数(4)が確定し、応力・変位等の必要な物理量を計算することができる。

2. 3 介在物先端における応力特異性の強さ

複素応力関数(4)が定めれば、介在物先端の応力特異性の強さは次式から計算することができる。

$$f = 2\sqrt{2} \lim_{z \rightarrow a} [\sqrt{z-a} \phi(z)] \quad (13)$$

そして介在物先端における特異な応力場は f によって次のように表される⁽⁸⁾⁻⁽¹⁰⁾。

$$\sigma_x = \frac{f}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left\{ \frac{3+x}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right\}$$

$$\sigma_y = -\frac{f}{\sqrt{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \left\{ \frac{x-1}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right\}$$

$$\tau_{xy} = \frac{f}{\sqrt{2r}} \sin \frac{\theta}{2} \left\{ \frac{1+x}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \right\} \quad (14)$$

3. 数値計算結果と検討

3. 1 計算した物理量と結果の精度

結果の整理に際しては、必要に応じて次のパラメータを用いた。

$$\lambda = \frac{a}{b}, \gamma = \frac{c}{b}, \mu = \frac{b}{c} = \gamma^{-1} \quad (15)$$

本研究では介在物先端付近の応力特異性の強さと介在物群のある弾性体の引張剛性係数を求めた。

介在物先端付近の応力特異性の強さ f は、 $\sigma\sqrt{a}$ で無次元化して与えた。すなわち

$$F = \frac{f}{\sigma\sqrt{a}}, \sigma = \sigma_1 \text{ or } \sigma_2 \quad (16)$$

また引張剛性係数は次式で定義される。

$$\text{引張剛性係数 } C_x = \frac{E_x^*}{E_0}, C_y = \frac{E_y^*}{E_0}$$

E_x^*, E_y^* = 介在物群がある場合の x 方向および y 方向の見かけの縦弾性係数

E_0 = 介在物のない弾性体の縦弾性係数

$$E = \begin{cases} E & (\text{平面応力}) \\ E/(1-\nu^2) & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \quad (17)$$

本解析による数値計算結果の精度は、領域外周の分割数を増すときの値の変動を調べることによって推定することができる。Table 1は、 x 方向の引張りについて $c/b = 1, a/b = 0.5$ の場合を例にとり、単位領域外周の分割数

Table 1 Variations of results with subdivision numbers

N	Problem (a) [c/b=1, a/b=0.5, (σ ₁ =σ, σ ₂ =0), rectangular unit region]		Problem (b) [c/b=1, a/b=0.5, (σ ₁ =σ, σ ₂ =0), rectangular unit region]	
	$F\left(\frac{f}{\sigma_1\sqrt{a}}\right)$	C _x	$F\left(\frac{f}{\sigma_1\sqrt{a}}\right)$	C _x
8	0.39417	1.11994	0.34645	1.23107
16	0.39334	1.12083	0.34645	1.23115
24	0.39331	1.12092	0.34645	1.23115
32	0.39331	1.12094	0.34645	1.23115

Nを8, 16, 24, 32として得た解析値を示したものである。なお計算は平面ひずみ状態でポアソン比ν=0.3として行った。両問題のFおよびC_xの値は分割数Nの増加で極めて良い収束を示している。

以下に述べる計算は、全て平面ひずみ状態でポアソン比ν=0.3として行い、Table 1と同様の検討を行って結果の精度を確めた。

3. 2 数値計算結果

本節では、問題(a)と問題(b)の介在物先端の応力特異性の強さと引張剛性係数の結果を示すが、図中の(a), (b)はそれぞれ問題(a)と問題(b)の結果に対応する。

Fig. 4(a), (b)は、x方向引張りを受ける場合について各c/bに対するFとλの関係を示したものである。

λ→0ではFは、無限板に一個の剛体扁平介在物をもつ場合となり、次の値に収束する⁽¹⁾。

$$[F]_{\lambda=0} = \frac{[f]_{\lambda=0}}{\sigma_1\sqrt{a}} = \frac{1+\chi}{4\chi} \quad (10)$$

両問題のFは、介在物の間隔比c/bにより介在物長さλの増大で異った増大・減少の傾向を示す。

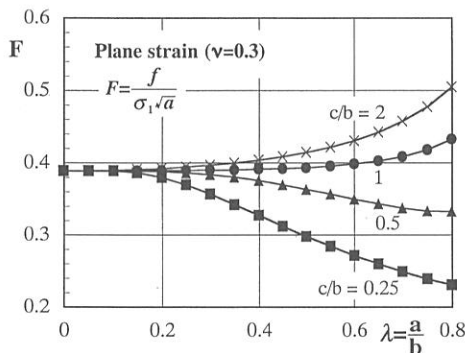


Fig. 4(a) F, λ - relations for Problem (a) (σ₁=σ, σ₂=0)

Fig. 5(a)~6(b)は、x方向およびy方向引張りを受ける場合について各c/bに対する引張剛性係数C_x, C_yとλ=a/bの関係を示したものである。

C_x, C_yは、c/bのいずれの場合もλの増大で単調に増大する。またC_x, C_yは、λが同じ場合、c/bの減少すなわち介在物群の上下間隔が密になるほど増大する。

以上の結果はポアソン比νの値によって幾分変動するので、ポアソン比の影響を検討しておく。Table 2は、問題(b)のポアソン比ν=0, 0.3, 0.5に対するF, C_x, C_yを示したものである。特にy方向引張りでは、ν>0.3でF, C_yの変動が大きい。

3. 3 引張剛性係数の計算式

前節の解析結果に基づいて、引張剛性係数C_x, C_y計算式をベキ級数表示で求めた。結果は次の通りである。

問題(a)：長方形配置

(i) x方向引張り (σ₁=σ, σ₂=0)

$$C_x = 1 + \lambda^2 [0.0213 - 0.3889\lambda + 1.1114\lambda^2 - 0.8354\lambda^3 + \mu(0.4066 + 0.4569\lambda - 1.1357\lambda^2 + 1.2173\lambda^3)]$$

(適用範囲；0.25 ≤ μ ≤ 0.8；平均誤差0.2%) (19)

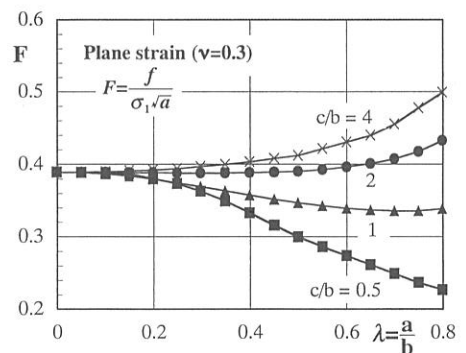
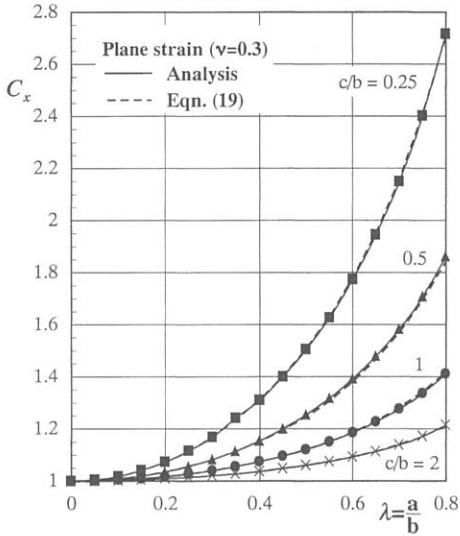
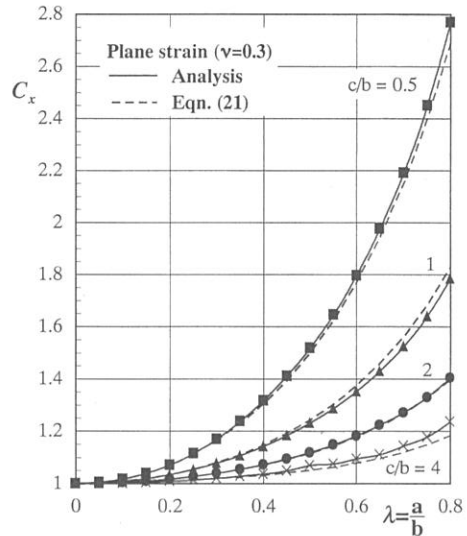
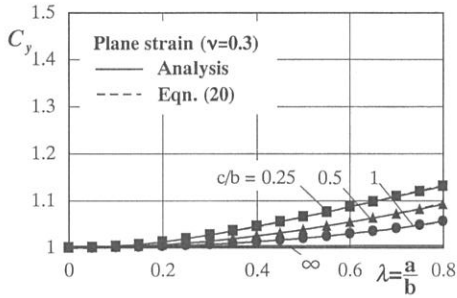
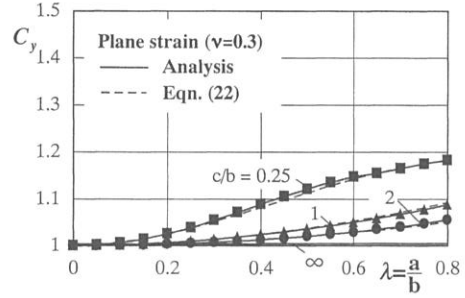


Fig. 4(b) F, λ - relations for Problem (b) (σ₁=σ, σ₂=0)

Fig. 5(a) C_x, λ - relations for Problem (a) ($\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = 0$)Fig. 5(b) C_x, λ - relations for Problem (b) ($\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = 0$)Fig. 6(a) C_y, λ - relations for Problem (a) ($\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma$)Fig. 6(b) C_y, λ - relations for Problem (b) ($\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma$)Table 2 Results for various values of Poisson's ratio ν in Problem (b) (Plane strain, $c/b=1$)

Case		Tension ($\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = 0$)		Tension ($\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma$)	
a/b	ν	F	C_x	F	C_y
0.3	0.0	0.3159	1.0981	0.0	1.0
	0.3	0.3688	1.0786	-0.1581	1.0136
	0.5	0.4625	1.0697	-0.4625	1.0697
0.5	0.0	0.2904	1.2942	0.0	1.0
	0.3	0.3465	1.2312	-0.1485	1.0357
	0.5	0.4352	1.1973	-0.4352	1.1973
0.8	0.0	0.2614	1.9973	0.0	1.0
	0.3	0.3384	1.7855	-0.1450	1.0879
	0.5	0.4573	1.6758	-0.4573	1.6758

(ii) y 方向引張り ($\sigma_1=0, \sigma_2=\sigma$)

$$C_y = 1 + \lambda^2 \mu [0.0728 + 0.0326\lambda + \mu(0.0036 - 0.0193\lambda)]$$

(適用範囲; $0 \leq \mu \leq 4.0, \lambda \leq 0.8$: 平均誤差0.04%) (20)

問類(b): 千鳥配置

(i) x 方向引張り ($\sigma_1=\sigma, \sigma_2=0$)

$$C_x = 1 + \lambda^2 [0.0082 - 0.1391\lambda - 0.0350\lambda^2 + 0.1453\lambda^3 + \mu(0.8191 + 0.6045\lambda - 1.1128\lambda^2 + 1.4892\lambda^3)]$$

(適用範囲; $0.25 \leq \mu \leq 2.0$: 平均誤差0.8%) (21)

(ii) y 方向引張り ($\sigma_1=0, \sigma_2=\sigma$)

$$C_y = 1 + \lambda^2 \mu [0.1438 + 0.0325\lambda + \mu(0.0100 - 0.434\lambda)]$$

(適用範囲; $0 \leq \mu \leq 4.0, \lambda \leq 0.8$: 平均誤差0.2%) (22)

式(19)~(22)による計算式の値を Fig. 5(a)~6(b)に破線で示したが、いずれの計算式も解析値と良い一致を示していることがわかる。

以上の計算式は、パラメータ λ, μ の任意の組合せについて引張剛性係数が精度良く求められ、従って実際の複合材料の設計にそれらの計算式を役立てることができる。

4. 結 論

(1)長方形配置および千鳥配置の剛体扁平介在物群をもつ無限体の引張りについて、適当な単位領域を考え、この領域に適当な複素応力関数と合力と変位に基づく境界分割法を組合せて高精度に解析した。

(2)介在物の長さおよびその横方向と縦方向の間隔の種々の組合せについて数値計算を行い、介在物先端の応力特異性の強さおよび介在物群をもつ弾性体の引張剛性係数

の結果を与えた。

(3)解析結果から引張剛性係数の計算式を与えた。それらの計算式を用いてパラメータ λ, μ の任意の組合せに対する引張剛性係数が精度良く求められる。

参考文献

- (1) 石田・井川, 日本機械学会論文集, 55 A - 510 (1993), 238.
- (2) 石田・井川, 久留米工業大学研究報告, No.11, (1987), 43.
- (3) 石田・井川, 日本機械学会論文集, 54 A - 504 (1988), 1504.
- (4) 井川・野田, 日本機械学会九州支部第51期総会講演論文集, 988-1 (1998), 40.
- (5) 井川, 日本機械学会平成10年度材料力学部門講演会講演論文集, 98-5A (1998), 51.
- (6) 井川・野田, 日本材料学会第48期学術講演会講演論文集, (1999), 217
- (7) 井川・平野, 日本機械学会久留米地方講演会講演論文集, 998-2 (1999), 75.
- (8) Sekine, H., Letters in Applied and Engineering Sciences, 5 (1977), 51.
- (9) 玉手・関根・小沢, 日本機械学会論文集, 48A - 425 (1982), 21.
- (10) 関根, 日本機械学会論文集, 48A - 435 (1982), 1415.