

複数個のき裂をもつ長方形板の引張り

井川 秀信*¹・西村 浩平*²

Tension of a Rectangular Plate with Cracks

Hidenobu IGAWA and Kouhei NISIMURA

Abstract:

In this paper, we consider a rectangular plate with cracks. In the analysis, we use the complex stress potentials in the Taylor series expansions satisfying the external loads and displacements at the outer edges of the rectangular plate, and the Body Force Method (BFM) satisfying the traction-free conditions of crack edges. At this stage, we use a procedure based on element-wise resultant forces and displacements in order to get highly accurate results. Numerical calculation is performed for a rectangular plate with cracks under uniform tension and tension of clamped ends.

Key Words: Two-Dimensional Elasticity, Body Force Method, Cracks, Stress Intensity Factor

1 緒 言

材料や構造の破壊にさいし、その中に潜在する複数個の欠陥からき裂が発生し、これらが互いに干渉しつつ最終破壊に至る場合が多い。特に、き裂の成長・合体時には、マクロき裂先端付近に微小き裂群の存在が認められており、破壊事故を解明するためにもマクロき裂の進展に及ぼす微小き裂の影響を把握しておく必要がある。

本研究は、長方形板に複数個のき裂が分布する場合について体積力法による解析を行ったものである。解析には、まず長方形板に任意の荷重や変位を受ける場合を考え、これを複素応力関数の級数展開で与える。次に複数個のき裂を考え、それらのき裂縁自由条件を満たすように体積力を分布させた。

計算は複数個のき裂をもつ長方形板に応力型引張りおよび変位型引張りを受ける場合について行い、無次元応力拡大係数の結果を与える。さらに隣接するき裂の接続における応力拡大係数について検討する。

2 解析方法

二次元弾性問題における応力、合力、変位の成分は、複素応力関数 $\varphi(z)$ 、 $\psi(z)$ とそれらの微係数によって

次のように表される。

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}[\varphi'(z)]$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \quad (1)$$

$$P_y + iP_x = -\bar{\varphi}(\bar{z}) - z\varphi'(z) - \psi'(z) \quad (2)$$

$$2G(u - iv) = \kappa\bar{\varphi}(\bar{z}) - z\varphi'(z) - \psi'(z) \quad (3)$$

ここに G はせん断弾性係数であり、 κ はポアソン比 ν によって次式で与えられる材料定数である。

$$\kappa = \begin{cases} \frac{3-\nu}{1+\nu} & (\text{平面応力}) \\ 3-\nu & (\text{平面ひずみ}) \end{cases} \quad (4)$$

本研究では、 m 個のき裂をもつ長方形板について解析を行ったが、説明の便宜上、Fig. 1 に示した 2 個のき裂をもつ長方形板を例に行う。なお、さらにき裂の個数を増やした場合でも以下に示す解析方法と何等違いは無い。

Fig. 1 において長方形板の幅および長さを $2b$ 、 $2c$ とし、板内に長さ $2a_1$ 、 $2a_2$ のき裂をもつ場合を考える。そして原点 O と x 、 y 軸を図のように定め、原点 O から各き裂中心までの距離を e_1 、 e_2 とする。解析は、問題の対称性を考慮して領域 DEHK について行う。

まず、この長方形板に Fig. 2(a) に示すような任意の

*¹機械工学科 *²久留米工業大学研究生
平成13年9月27日受理

外力 $P_{x,a}^*$, $P_{y,a}^*$ および u_a^* , v_a^* を受ける場合を考える。この問題に適当な複素応力関数 $\varphi_a(z)$, $\phi_a'(z)$ として次の級数展開を仮定する。

$$\begin{aligned} \varphi_a(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} M_n z^{n+1} \\ \phi_a'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} K_n z^{n+1} \end{aligned} \quad (5)$$

ここに係数 M_n , K_n は実数である。

式 (5) によって得られた Fig. 2(a) の長方形板は、外周に加わる外力および変位による板内部の応力場を与えるが、き裂縁が自由となる条件を満たしていない。そこで式 (5) を用いてき裂縁相当位置に生ずる応力から合力を求め、これを次に示す集中力 Q の基本解を用いて打ち消す (Fig. 2(b) および Fig. 3)。

$$\begin{aligned} \varphi_b(z) &= -\frac{Q}{2\pi(\kappa+1)} \log(z-\zeta) \\ \phi_b'(z) &= -\frac{1}{2\pi(\kappa+1)} \left[\kappa \bar{Q} \log(z-\zeta) + Q \frac{\bar{\zeta}}{z-\zeta} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

各き裂面を自由縁とするために、式 (6) から求めたき裂面に直角な方向 (y 軸方向) の体積力対 $Q_1 = p_1(s) ds$ とき裂面方向 (x 軸方向) の体積力対 $Q_2 = p_2(s) ds$ を分布させる (Fig. 2(b))。ここに $p_1(s)$, $p_2(s)$ はき裂面に分布させる体積力の密度であり、 s はき裂中央からの距離である。そして Q_1 と Q_2 の体積力がき裂縁にせん断力応力を生じないための条件が石田によって求められており⁽¹⁾、これを書くとき次のようになる。

$$p_2(s) = \frac{\kappa-3}{\kappa+1} \frac{dp_1(s)}{ds} \quad (7)$$

式 (7) によって求める体積力は $Q_1 = p_1(s) ds$ だけとなるが、き裂先端の局部応力場の特性に適合させるため次の関係式を用いた。

$$p_1(s) = \frac{(\kappa+1)^2}{2(\kappa-1)} f_i(s) \sqrt{a_i^2 - s^2} \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (8)$$

式 (8) の重み関数 $f_i(s)$ は折れ線関数による合力境界条件法⁽¹⁾で求めた (Fig. 4)。

以上によって Fig. 2(b) からき裂縁自由の条件が満たされることになる。そして体積力を分布させたことにより新たに長方形板外周に合力 $P_{x,b}^*$, $P_{y,b}^*$ と変位 u_b^* , v_b^* を生ずるが、解析モデル (Fig. 3(c)) の境界条件を満たすように Fig. 2(a) と Fig. 2(b) を組合せて連立に解くことにより式 (5) の未知係数と体積力の重みを定めることができる。このとき Fig. 1 に示した板の外周の辺 DE, EH, HK の境界条件から合力と変位に基づく境界分割法を用いて定める⁽²⁾⁻⁽⁴⁾。

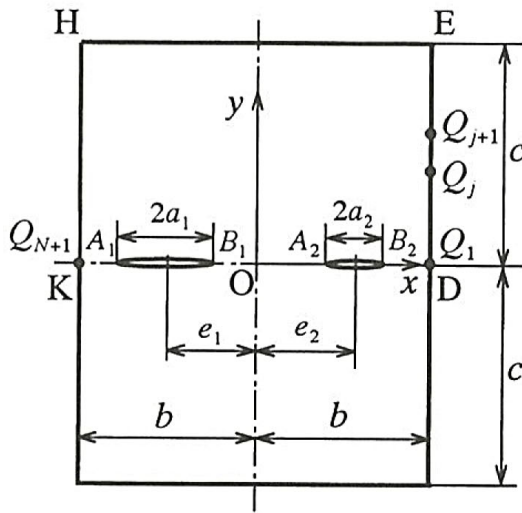


Fig. 1 Rectangular plate with two cracks

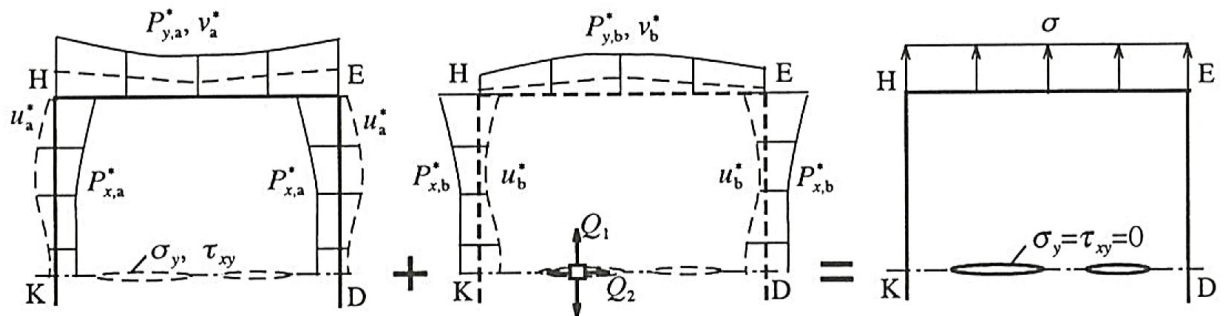


Fig. 2 Analytic model

Fig. 1 に示した板外周の辺 DE, HK をそれぞれ N_1 個の等区間に, 辺 EH を N_2 個の等区間に分割し, 分点を Q_j ($j = 1, 2, \dots, N+1$; $N = 2N_1 + N_2$) とする。

区間 $Q_j \cdot Q_{j+1}$ に対する境界条件は次のように書かれる。

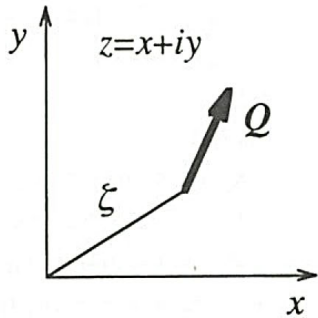


Fig. 3

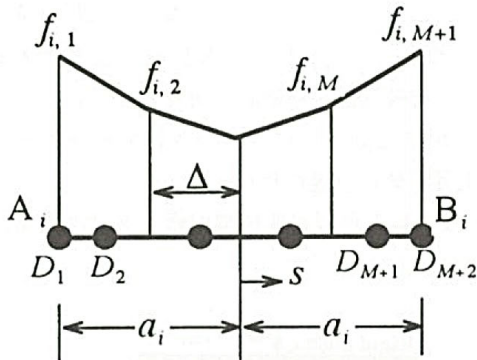


Fig. 4

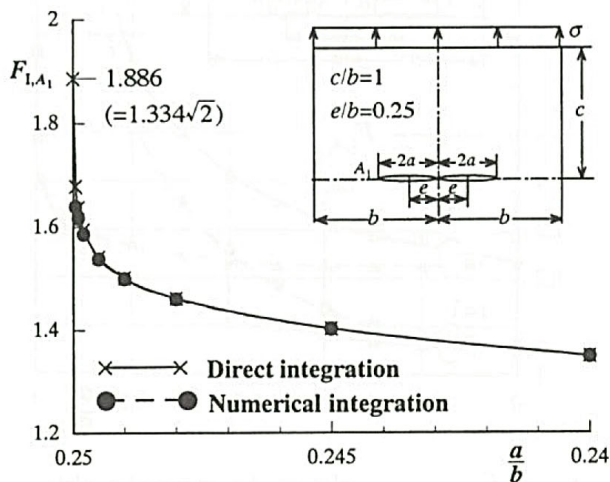


Fig. 5 SIF for the neighborhood connecting two cracks under uniform tension

(i) 応力が与えられている場合

$$[(P_{y,a}^* + iP_{x,a}^*) + (P_{y,b}^* + iP_{x,b}^*)]_{Q_j}^{Q_{j+1}} = [P_{y,c}^* + iP_{x,c}^*]_j \quad (9)$$

ここに左辺の $P_{y,a}^*, P_{x,a}^*$ は式 (5) の複素応力関数による合力の成分であり, $P_{y,b}^*, P_{x,b}^*$ は体積力を分布させたことによって生ずる合力の成分である。また右辺の $[P_{y,c}^* + iP_{x,c}^*]_j$ は区間 $Q_j \cdot Q_{j+1}$ に作用する応力の合力の成分である。

(ii) 変位が与えられている場合

$$[(u_a^* - iv_a^*) + (u_b^* - iv_b^*)]_{Q_j} + [(u_a^* - iv_a^*) + (u_b^* - iv_b^*)]_{Q_{j+1}} = [u_c^* - iv_c^*]_{Q_j} + [u_c^* - iv_c^*]_{Q_{j+1}} \quad (10)$$

ここに左辺の u_a^*, v_a^* は式 (5) の複素応力関数による変位の成分であり, u_b^*, v_b^* は体積力を分布させたことによって生ずる変位の成分である。また右辺の $[u_c^* - iv_c^*]_{Q_j}$ は点 Q_j に境界条件として与えられる変位の成分である。

このようにして複素応力関数 (5) を式 (2) または式 (3) に用いた結果を各区間 $Q_j \cdot Q_{j+1}$ について式 (9) または式 (10) に代入し, 両辺の実数部と虚数部をそれぞれ等値すれば, 式 (5) における $2N$ 個の未知係数 M_n, K_n ($n = 0, 1, 2, \dots, N-1$) に対する $2N$ 個の関係式が得られる。また体積力の関係式を式 (2) または式 (3) に用いた結果を各区間 $Q_j \cdot Q_{j+1}$ について式 (9) または式 (10) に代入し, 両辺の実数部と虚数部をそれぞれ等値すれば, 体積力の重み $f_{i,j}$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, M+1$) に対する $2N$ 個の関係式が得られる。そしてき裂面に分布させた体積力の関係式と前述の関係式 (9), (10) を連立に解くことにより式 (5) の未知係数と体積力の重み $f_{i,j}$ が定まる⁽⁵⁾⁻⁽¹²⁾。

各き裂の先端 A_i, B_i の応力拡大係数は次式から求められる。

$$K_{I,A_i}, K_{I,B_i} = [f_i(s)]_{s=\pm a_i} \sqrt{\pi a_i} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (11)$$

3 解析結果

本研究では, 次式で定義された無次元応力拡大係数を求めた。

$$F_{I,A_i} = \frac{K_{I,A_i}}{\sigma \sqrt{\pi a_i}}$$

$$F_{I,B_i} = \frac{K_{I,B_i}}{\sigma \sqrt{\pi a_i}} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (12)$$

Fig. 5 は, 長方形板の両端に一樣引張応力を受ける場合に 2 個の等長さ裂が接続する極限までの無次元応力拡大

大係数 F_{1,A_1} を示したものである。なお図中の実線は式 (6) から求められる関係式を直接積分で求めた場合であり、破線はそれらを Simpson 則による数値積分で求めた場合である。この場合、 $a/b \rightarrow 0.25$ で $F_{1,A_1} = 1.334\sqrt{2}$ が解であるが、直接積分による結果は何等問題無くその解に収束する。一方、数値積分では接続の極限付近で急激に解析精度が低下し、解は求まらない。

Fig. 6 は、Fig. 5 と同様に長方形板の両端に変位型引

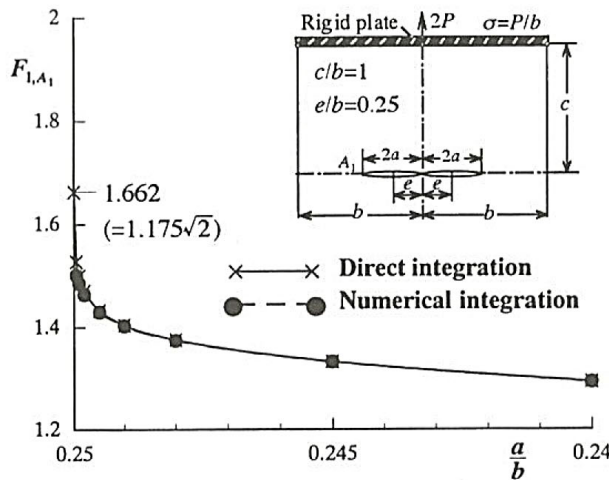


Fig. 6 SIF for the neighborhood connecting two cracks under tension of clamped ends

張りを受ける場合の無次元応力拡大係数 F_{1,A_1} を示したものである。この場合、 $a/b \rightarrow 0.25$ で $F_{1,A_1} = 1.175\sqrt{2}$ が解であり、前述の結果と同様に直接積分による結果はその解に収束する。

以上のことから分布させた体積力の関係式を直接積分で求めることによりき裂接続まで解を精度良く求めることができる。なおこの場合、き裂接続について何等特別な処理を必要としていない。以下に述べる計算結果は、全て直接積分で求めた。

Fig. 7 は、長方形板が応力型引張りを受ける場合について 2 個の不等長さの無次元応力拡大係数と a_2/a_1 の関係を示したものである。なお主き裂の長さ $a_1/b = 0.25$ を一定に保ち、主き裂と副き裂の長さ比 a_2/a_1 をき裂接続まで連続的に変えた。両き裂の近接端 B_1, A_2 の無次元応力拡大係数 F_{1,B_1}, F_{1,A_2} は、 a_2/a_1 の増大で急激に増大し、き裂接続で無限大になる。従って、互いのき裂端の接近で応力拡大係数を増大させ、き裂の成長を加速させることが分かる。一方、両き裂端 A_1, B_2 の無次元応力拡大係数 F_{1,A_1}, F_{1,B_2} は、き裂接続付近まであまり変化は無く、接続直前から急激に増大する。そして、 F_{1,A_1}, F_{1,B_2} はき裂接続直前から一個のき裂を形成する無次元応力拡大係数値に急速に移行する。

Fig. 8 は、長方形板が変位型引張りを受ける場合につ

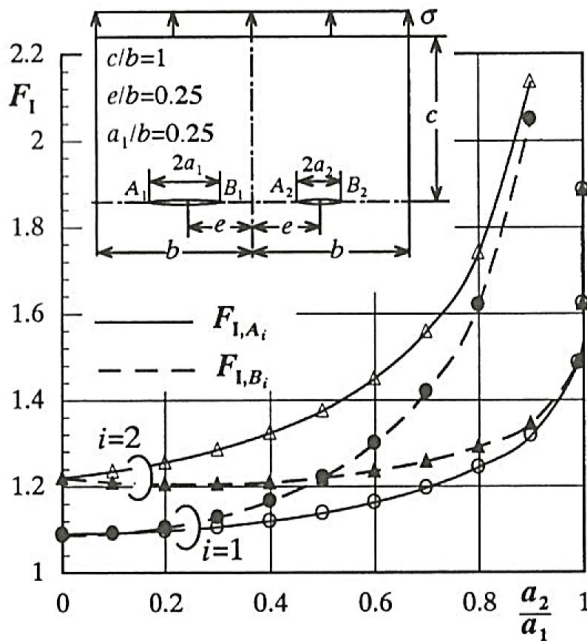


Fig. 7 $F_1, a_2/a_1$ - relations for rectangular plate with two cracks Under uniform tension

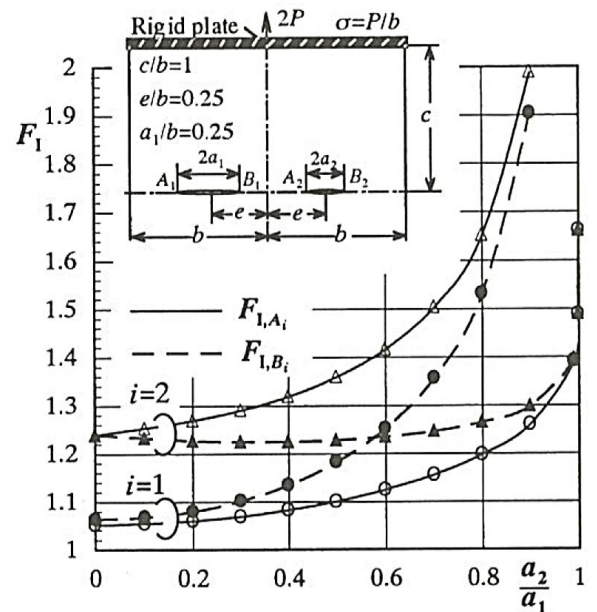


Fig. 8 $F_1, a_2/a_1$ - relations for rectangular plate with two cracks Under tension of clamped ends

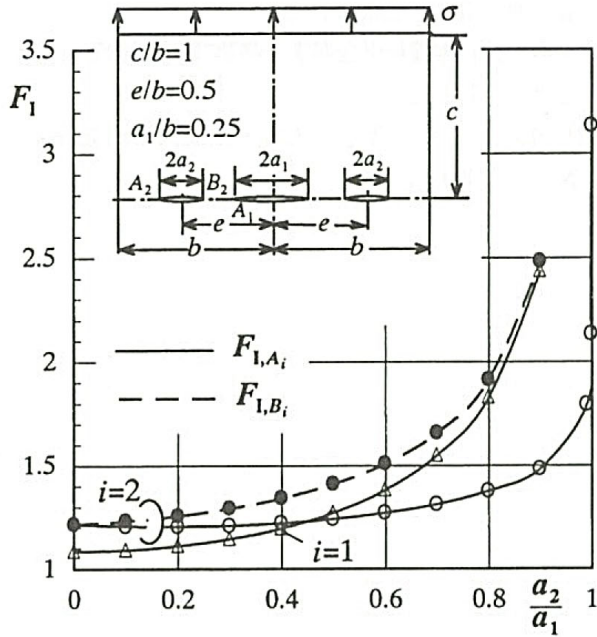


Fig. 9 $F_1, a_2/a_1$ - relations for rectangular plate with three cracks Under uniform tension

いて2個の不等長さ裂の無次元応力拡大係数と a_2/a_1 の関係を示したものである。この場合の無次元応力拡大係数は、Fig. 7の結果とほぼ同様の傾向を示す。

Fig. 9, 10は、それぞれ3個のき裂をもつ長方形板が応力型引張りおよび変位型引張りを受ける場合の無次元応力拡大係数と a_2/a_1 の関係を示したものである。なお主き裂の長さ $a_1/b = 0.25$ を一定に保ち、主き裂と副き裂の長さ比 a_2/a_1 をき裂接続まで連続的に変えた。各き裂端の無次元応力拡大係数は、前述の2個のき裂の場合とほぼ同様の傾向を示す。

本研究で開発した応力解析プログラムは、種々の荷重条件下で必要に応じてき裂の個数およびその長さを自由に設定でき、き裂接続までを含めたき裂干渉問題の応力拡大係数を精度良く求めることができる。

4 結 論

- (1) 複数個のき裂をもつ長方形板について、複素応力関数の級数展開と体積法を組合せた高精度応力解析法を開発した。
- (2) き裂面に分布させた体積力の関係式を直接積分で求めることによりき裂接続までの解析が可能となった。
- (3) 2個および3個のき裂をもつ長方形板が応力型引張りおよび変位型引張りを受ける場合を解析し、無次

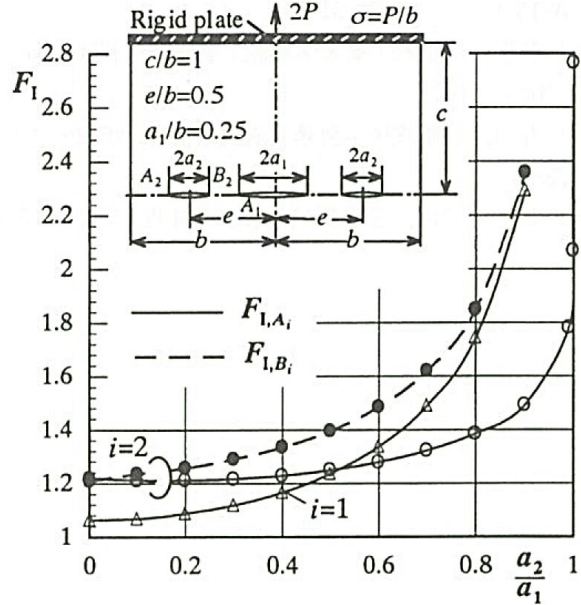


Fig. 10 $F_1, a_2/a_1$ - relations for rectangular plate with three cracks Under tension of clamped ends

元応力拡大係数の結果を与えた。

- (4) 主き裂に及ぼす副き裂の影響を検討した結果、互いのき裂端の接近で応力拡大係数を増大させ、き裂の成長を加速させる。
- (5) 本法は、種々の荷重条件下で必要に応じてき裂の個数およびその長さを自由に設定でき、き裂接続までを含めたき裂干渉問題の応力拡大係数を精度良く求めることができる。

参考文献

- (1) 石田・野口, 日本機械学会論文集, 49A-437 (1983) 36-44.
- (2) 石田・井川, 日本機械学会論文集, 55A-510 (1989) 238-245.
- (3) 石田・寺田, 日本機械学会論文集, 43-374 (1977) 3636-3641.
- (4) 石田・牛島・岸根, 日本機械学会論文集, 47-A-413 (1981) 27-35.
- (5) 井川・野田, 日本機械学会講演論文集, No.998-1 (1999) 3-4.
- (6) 井川・平野, 日本機械学会第12回計算力学講演会講演論文集, (1999) 421-422.
- (7) 井川, 日本機械学会弾性数理解析法の工学的体系化に関する調査研究会平成9~11年度成果報告書,

- A-TS 03-11 (2000) 51-54。
- (8) 井川, 久留米工業大学知能工学研究所報告, No.12 (2000) 57-62。
- (9) 井川, 日本機械学会講演論文集, No.005-2 (2000) 53-54。
- (10) 井川・野田, 日本機械学会2000年度年次大会講演論文集 (Ⅱ), (2000) 79-80。
- (11) 井川, 日本機械学会関東支部第7期総会講演論文集, (2001) 113-114。
- (12) 井川・占部・篠原, 久留米工業大学研究報告, No.24 (2000) 1-7。