

〔論文〕

# 任意に分布するき裂群の解析

## (第1報: 引張応力を受ける無限板)

井川 秀信\*

Analysis of Arbitrary Arrays of Cracks  
(Part 1 Infinite Plate Subjected by Tensile Stress)

Hidenobu IGAWA

### Abstract

In this paper, we consider arbitrary arrays of cracks in an infinite plate. In the analysis, we use the Body Force Method (BFM) by satisfying the traction-free conditions of crack edges, in which expressions of the body force densities based on resultant forces are introduced in order to get highly accurate results. Numerical calculation is performed for various arrays of cracks under tension.

### 1. 緒言

疲労破壊は、き裂の発生・成長により最終破壊に至る現象であるが、き裂発生初期の段階やき裂成長期には、材料内部に微小き裂が数多く分布しており、それらの干渉がき裂成長に影響する。

疲労寿命の予測にはき裂先端の応力場を示すパラメーターである応力拡大係数が重要な役割を持ち、それを高精度に求めるため計算機によるシミュレーションが数多く行われてきた。しかし、いまだ未解決な問題も多く、特に複数個のき裂解析については解析が困難であるため研究途上にある。

著者らは、これまでローラン展開法による応力解析法を開発し、複数個のき裂に対する応力拡大係数の結果を与えた<sup>(1)-(4)</sup>。しかしローラン展開法では、2個以上のき裂先端の接近に伴い精度が急激に低下する欠点がある。この問題点を解決するため体積力法を応用した研究を進めている<sup>(5)-(9)</sup>。

本研究は、複数個のき裂が任意に分布する場合について汎用的な高精度応力解析法を開発したものである。解析は、き裂相当面に体積力を分布させてき裂縁を自由とする方法をとった。このとき合力に基づく境界分割法を用いて体積力の重みを高精度に定

めた。計算例では、平行き裂群の応力拡大係数とその漸近特性や微小き裂群の存在によるマクロき裂の応力拡大係数など、種々のき裂干渉問題について検討する。

### 2. 解析方法

二次元弾性問題における応力、合力の成分は、複素応力関数  $\varphi(z)$ 、 $\psi(z)$  とそれらの微係数によって次のように与えられる。

$$\sigma_y + \sigma_x = 4 \operatorname{Re}[\varphi(z)] \quad (1)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)] \quad (2)$$

$$P_y + iP_x = -\bar{\varphi}(\bar{z}) - z\varphi'(\bar{z}) - \psi'(z) \quad (3)$$

まず、Fig. 1 に示した無限板に角度  $\beta$  の傾斜をもつき裂を考える。原点  $O$  に対するき裂中央の位置を  $z_0$  とし、き裂長さを  $2a$  とする。またき裂面に沿った法線方向  $n$  と接線方向  $s$  を図のように定める。

本研究の解析には、Fig. 2 (a)、(b) に示すような、無限板内の任意の点  $z$  に作用する2種類の集中力対が基礎となる。これらに対する複素応力関数は

\*交通機械工学科  
平成20年5月22日

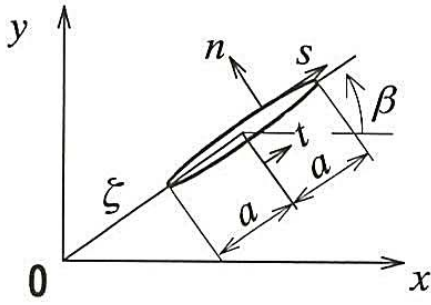


Fig. 1 Slant crack

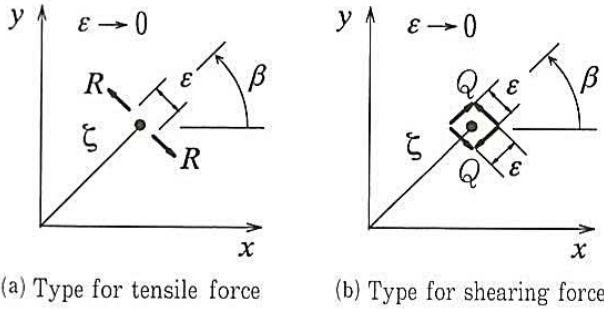


Fig. 2 Body force densities.

次式 (4)、(5) で与えられる。但し、ここで取扱うような、境界条件が自平衡な荷重だけで与えられ、かつ応力状態だけを対象とする問題では、結果はポアソン比  $\nu$  に関係しないので、便宜上、 $\nu$  を 0 とした。

引張り型集中力対  $R$  :

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= -\frac{R}{8\pi} \frac{e^{2i\beta}}{z-\zeta}, \\ \psi_1'(z) &= -\frac{R}{8\pi} \left[ \frac{2}{z-\zeta} + \frac{\bar{\zeta} e^{2i\beta}}{(z-\zeta)^2} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

せん断型集中力対  $Q$  :

$$\begin{aligned} \varphi_2(z) &= \frac{iQ}{8\pi} \frac{e^{2i\beta}}{z-\zeta}, \\ \psi_2'(z) &= \frac{iQ}{8\pi} \frac{\bar{\zeta} e^{2i\beta}}{(z-\zeta)^2} \end{aligned} \quad (5)$$

従って、 $P$ 、 $Q$  が同時に作用する場合の関数は、

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_1(z) + \varphi_2(z), \\ \psi'(z) &= \psi_1'(z) + \psi_2'(z) \end{aligned} \quad (6)$$

となり、き裂面に沿った法線方向  $n$  と接線方向  $s$  の合力は次式から求められる。

$$\begin{aligned} P_n + iP_s &= (P_x + iP_y) e^{i\beta} \\ &= [-\bar{\varphi}(\bar{z}) - \bar{z}\varphi'(z) - \psi'(z)] e^{i\beta} \end{aligned} \quad (7)$$

き裂面を自由縁とするために引張り型の体積力対  $R=p(t)dt$  とせん断型の体積力対  $Q=q(t)dt$  をき裂相当面に分布させる。ここに  $p(t)$ 、 $q(t)$  はき裂面に分布させる体積力の密度であり、 $t$  は Fig. 1 に示したき裂中央からの距離である。

任意個のき裂解析には各き裂縁に体積力対を分布させる必要がある。各き裂の座標系と幾何学パラメータを Fig. 3 の様に定め、各き裂先端局部応力場の特性に適合する次の関係式を用いる。

$$\begin{aligned} p(t) &= 4\sqrt{a_i^2 - t^2} f_i(t), \\ q(t) &= 4\sqrt{a_i^2 - t^2} g_i(t) \end{aligned} \quad (8)$$

式 (8) の重み関数  $f_i(t)$ 、 $g_i(t)$  は、Fig. 4 に示した折れ線関数による合力境界分割法で求めた。

き裂の個数を  $N$ 、各き裂長さを  $a_i$  とするとき、き裂端  $A_i$ 、 $B_i$  の応力拡大係数は次式で求められる。

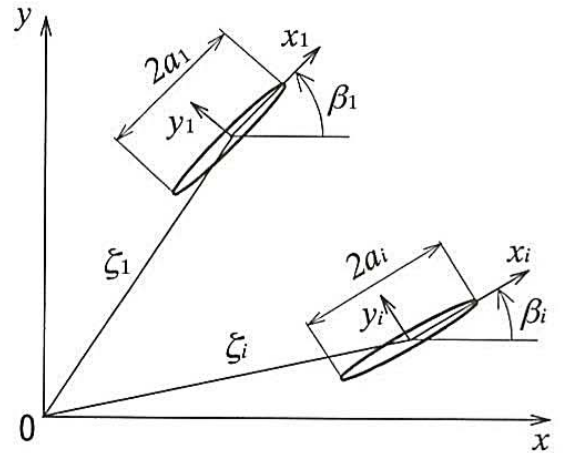


Fig. 3 Arbitrary array of cracks in wide plate.

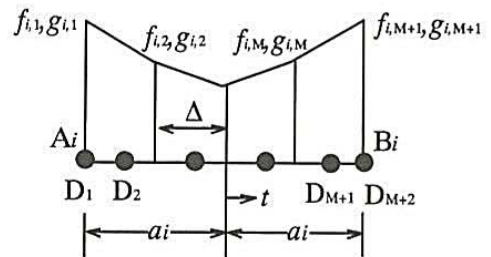


Fig. 4 Distribution of body force densities.



$$K_{I,A_i}, K_{I,B_i} = [f_i(t)]_{t=\pm a_i} \sqrt{\pi a_i},$$

$$K_{II,A_i}, K_{II,B_i} = [g_i(t)]_{t=\pm a_i} \sqrt{\pi a_i} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (9)$$

### 3. 解析結果

#### 3.1 無次元応力拡大係数

本研究では、次式で定義されたモードⅠ、モードⅡの無次元応力拡大係数を求めた。

無次元応力拡大係数

$$F_{I,A_i} = \frac{K_{I,A_i}}{\sigma \sqrt{\pi a_i}}, \quad F_{I,B_i} = \frac{K_{I,B_i}}{\sigma \sqrt{\pi a_i}},$$

$$F_{II,A_i} = \frac{K_{II,A_i}}{\sigma \sqrt{\pi a_i}}, \quad F_{II,B_i} = \frac{K_{II,B_i}}{\sigma \sqrt{\pi a_i}} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (10)$$

#### 3.2 等長平行き裂群

Fig. 5は、図中の垂直方向引張りについてき裂の個数  $N=2 \sim 10$ 、き裂の傾斜角度  $\beta=45^\circ$  の等長平行き裂群の各き裂端の無次元応力拡大係数を示した

ものである。なお図中の左端がき裂群の最も外側であり、これよりき裂中央までの結果を示した。この場合、 $F_I, F_{II}$  は、き裂群の最も外側で最小となり、き裂群中央で最大となる。

Fig. 6は、図中の垂直方向引張りについてき裂の傾斜角度  $\beta$  の等長平行き裂群の無次元応力拡大係数  $F_{I,B_M}, F_{II,B_M}$  とき裂個数の逆数  $1/N$  の関係を示したものである。なおこの場合の無次元応力拡大係数は、き裂群中央 ( $B_M$ ) で最大となる。 $F_{I,B_M}$  はき裂の個数  $N$  が増すと増大するが、 $F_{II,B_M}$  は  $N$  が増すと僅かに減少する。また  $F_{I,B_M}, F_{II,B_M}$  は、き裂の傾斜角度  $\beta$  のいずれの場合も  $1/N$  と良い直線関係にあり、著者らがこれまでに行った方法<sup>(1), (2)</sup> に基づき直線外挿することで  $N \rightarrow \infty$  の無次元応力拡大係数を求めることができる。Table 1は、Fig. 6の  $F_{I,B_M}, F_{II,B_M}$  の値と  $N=8, 10$  から外挿した  $N \rightarrow \infty$  の無次元応力拡大係数を示したものである。

Fig. 7は、図中の水平方向引張りについて等長平行き裂群の無次元応力拡大係数  $F_{I,A_1}, F_{II,A_1}$  とき裂個数の逆数  $1/N$  の関係を示したものである。なおこの場合の無次元応力拡大係数は、き裂群の最も外

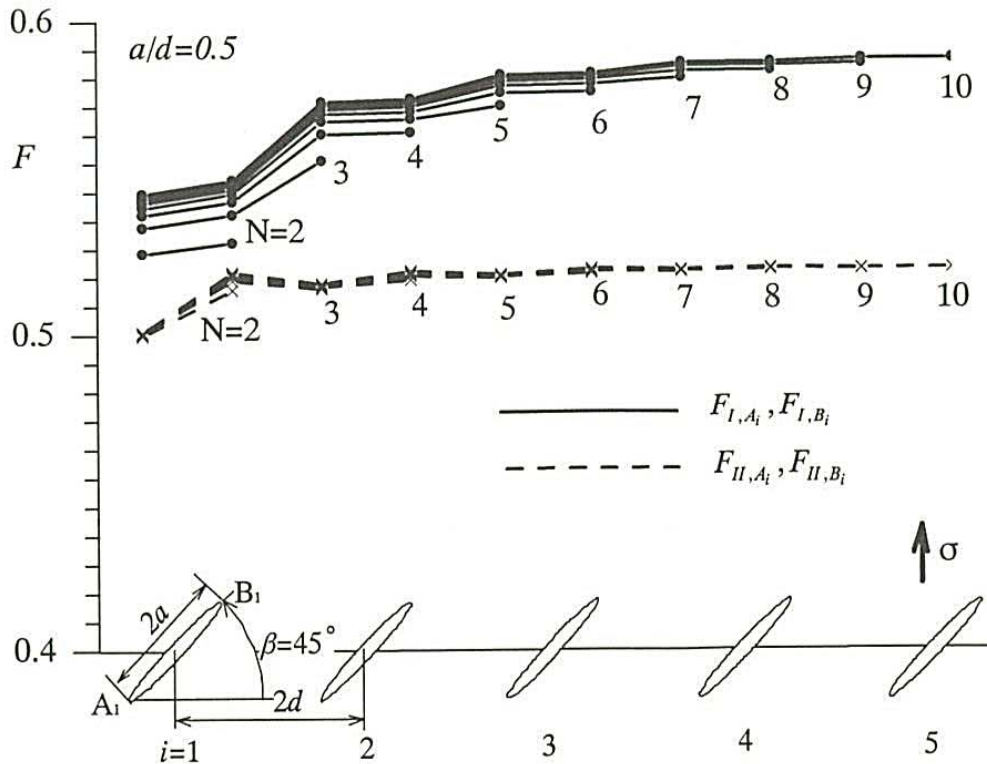


Fig. 5  $F_I, F_{II}$  for each crack edges.

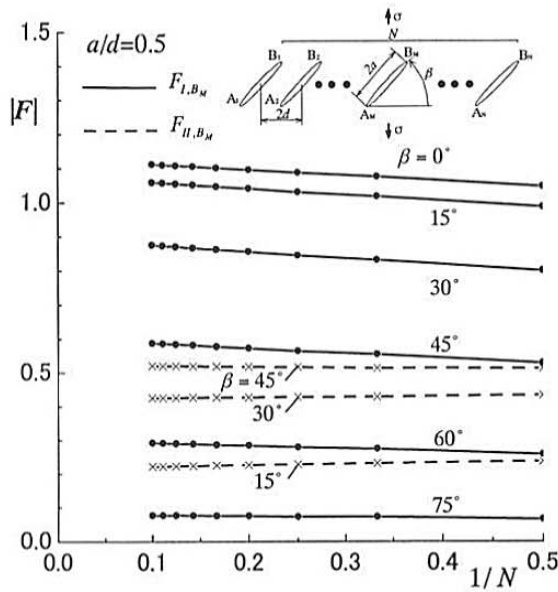


Fig. 6  $|F|$ ,  $1/N$ -relations.

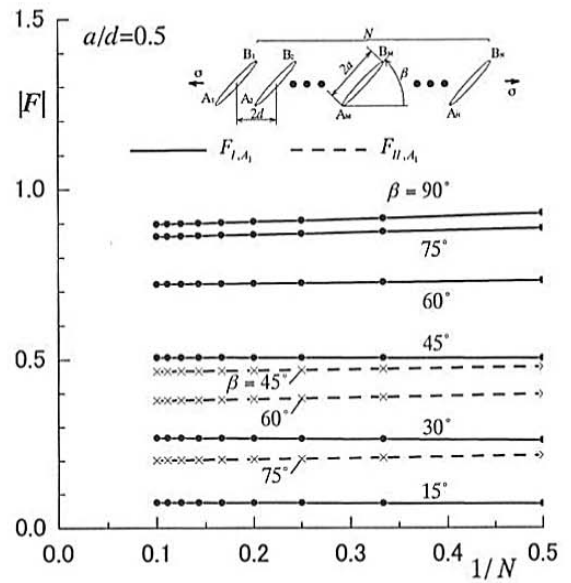


Fig. 7  $|F|$ ,  $1/N$ -relations.

側 ( $A_1$ ) で最大となる。 $F_{I,A_1}$  は、 $\beta = 90^\circ \sim 60^\circ$  まではき裂の個数  $N$  の増加で幾分減少し、それ以外の  $\beta$  では  $N$  の増加で僅かに増大する。 $F_{II,A_1}$  は  $N$  の増加で幾分増大する。各  $\beta$  に対する  $F_{I,A_1}$ 、 $F_{II,A_1}$  は、き裂の傾斜角度  $\beta$  のいずれの場合も  $1/N$  と良い直線関係にある。Table 2 は、Fig. 7 の  $F_{I,A_1}$ 、 $F_{II,A_1}$  の値と  $N = 8, 10$  から外挿した  $N \rightarrow \infty$  の無次元応力拡大係数を示したものである。

### 3. 3 微小き裂群とマクロき裂の干渉問題

本節では、材料内部に存在する微小き裂群やマクロき裂先端付近のすべり帯に発生する微小き裂群とマクロき裂の干渉問題について取り上げる。なおマクロき裂を主き裂、微小き裂を副き裂と呼ぶことにし、主き裂の長さを  $a_1$ 、副き裂の長さを  $a_2$  とする。先ず副き裂が主き裂の両端  $A_1$ 、 $B_1$  の応力拡大係数に与える影響について検討する。

Fig. 8 は、図中の引張応力を受ける場合について

Table 1 Values of  $F_{I,B_M}$ 、 $F_{II,B_M}$  for Fig. 6.

$N \setminus \beta$	$F_{I,B_M}$						$F_{II,B_M}$		
	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$
2	1.048	0.988	0.801	0.529	0.259	0.066	0.238	0.435	0.514
3	1.077	1.019	0.833	0.556	0.276	0.073	0.232	0.430	0.515
4	1.088	1.032	0.846	0.565	0.280	0.074	0.229	0.430	0.518
5	1.097	1.042	0.856	0.573	0.285	0.075	0.227	0.428	0.518
6	1.101	1.047	0.862	0.578	0.287	0.076	0.225	0.428	0.520
7	1.106	1.052	0.867	0.582	0.289	0.077	0.224	0.427	0.520
8	1.108	1.055	0.871	0.584	0.290	0.077	0.223	0.427	0.521
9	1.111	1.058	0.874	0.587	0.292	0.078	0.222	0.427	0.521
10	1.112	1.060	0.876	0.588	0.292	0.078	0.222	0.426	0.521
$\infty^*$	1.114	1.062	0.878	0.590	0.293	0.078	0.222	0.426	0.521

\* Values for  $N \rightarrow \infty$  are extrapolated from those for  $N = 8, 10$ .



Table 2 Values of  $F_{I,A_1}$ ,  $F_{II,A_1}$  for Fig. 7.

N \ $\beta$	$F_{I,A_1}$						$F_{II,A_1}$		
	90°	75°	60°	45°	30°	15°	75°	60°	45°
2	0.930	0.886	0.732	0.503	0.260	0.072	-0.216	-0.398	-0.478
3	0.915	0.875	0.727	0.505	0.264	0.073	-0.209	-0.389	-0.473
4	0.909	0.870	0.725	0.506	0.265	0.074	-0.206	-0.386	-0.470
5	0.905	0.867	0.724	0.506	0.266	0.075	-0.204	-0.383	-0.468
6	0.902	0.865	0.723	0.506	0.267	0.075	-0.203	-0.382	-0.467
7	0.901	0.864	0.723	0.506	0.267	0.075	-0.203	-0.381	-0.467
8	0.900	0.863	0.722	0.506	0.267	0.075	-0.202	-0.380	-0.466
9	0.899	0.862	0.722	0.507	0.268	0.075	-0.202	-0.380	-0.466
10	0.898	0.861	0.722	0.507	0.268	0.075	-0.201	-0.379	-0.466
$\infty^*$	0.897	0.861	0.722	0.507	0.268	0.075	-0.201	-0.379	-0.465

\* Values for  $N \rightarrow \infty$  are extrapolated from those for  $N=8, 10$ .

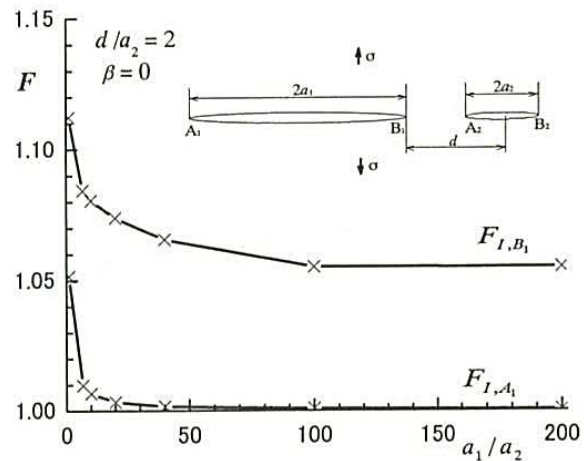
副き裂の角度  $\beta = 0^\circ$ 、 $d/a_2 = 2$  としたときの副き裂に対する主き裂の長さ比  $a_1/a_2$  と主き裂の無次元応力拡大係数  $F_{I,A_1}$ 、 $F_{I,B_1}$ 、の関係を示したものである。図に示す様に  $a_1/a_2 > 6.67$  (その逆数  $a_2/a_1 < 0.15$ ) では、副き裂の存在による主き裂の  $F_{I,A_1}$  に与える影響は 1% 以下となり、副き裂が主き裂端  $A_1$  の応力拡大係数に与える影響は殆ど無い。

Fig. 9 は、主き裂に対する副き裂の長さ比  $a_2/a_1 = 0.1$  に固定し、図中の垂直方向引張りについて副き裂の角度  $\beta$  に対する主き裂および副き裂の無次元応力拡大係数を示したものである。Case 1 は片側副き裂の場合であり、Case 2 は両側副き裂の場合である。なお、Case 2 は主き裂中央から右側に位置するき裂端の無次元応力拡大係数を示した。両者の結果を実線と破線で示したが、両者は殆ど差が無い。すなわち Case 1 のモデルを基にき裂の  $B_1$  端のみに対する副き裂との干渉を調べることができる。

次に副き裂群の存在が主き裂の応力拡大係数に与える影響について検討する。

Fig. 9 に示す様に副き裂の  $F_{I,A_2}$  は  $\beta = 0^\circ$  で最大値となり、 $F_{II,A_2}$  は  $\beta = 45^\circ$  で最大値となる。また  $F_{I,B_1}$  は、副き裂の傾斜角度  $\beta = 0^\circ \sim 90^\circ$  の範囲で幾分増大し、 $\beta = 0^\circ$  で最大値となる。

Fig. 10 は、前述の結果を基にき裂の長さ比  $a_2/a_1$

Fig. 8  $F$ ,  $a_1/a_2$  -relations.

$= 0.1$  に固定し、副き裂の角度  $\beta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  における主き裂の無次元応力拡大係数  $F_{I,B_1}$  と副き裂の個数の逆数  $1/N$  の関係を示したものである。主き裂の  $F_{I,B_1}$  は、 $\beta$  のいずれの場合も微小き裂の個数  $N$  の増加で増大する。また  $F_{I,B_1}$  は、副き裂の個数の逆数  $1/N$  と良い直線関係にあることが分かる。

#### 4. 結 論

- (1) 無限板にき裂群が任意に分布する場合について体積法による高精度応力解析法を開発した。
- (2) 本法を用いて引張応力下での平行傾斜き裂群

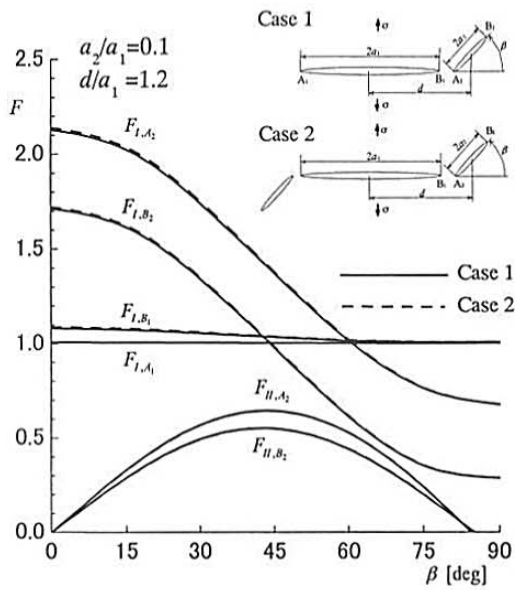


Fig. 9  $F, \beta$ -relations.

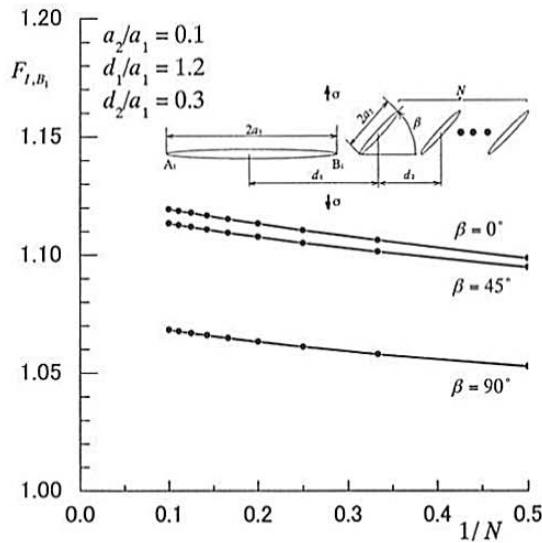


Fig.10  $F_{I,B_1}, 1/N$ -relations.

の無次元応力拡大係数および微小き裂群の存在によるマクロき裂の無次元応力拡大係数の結果を与えた。

- (3) 等長の平行傾斜き裂群では、各き裂の応力拡大係数はき裂の傾斜角度に関係無くき裂の個数の逆数  $1/N$  と良い直線関係にある。この関係は、微小な等長き裂群の存在によるマクロき裂の応力拡大係数の場合にも適用できる。

参考文献

- (1) 石田・井川、久留米工業大学研究報告、No.15 (1991)、pp.11-28.
- (2) 石田・井川、日本機械学会論文集、58A-553 (1992)、pp.1642-1649.
- (3) 石田・井川、日本機械学会論文集、59A-561 (1993)、pp.1262-1269.
- (4) M.Isida, H.Igawa, International Journal of Fracture Vol.65 (1994)、pp.247-259.
- (5) 井川・平野、日本機械学会講演論文集、No.95-5 (1999)、pp.421-422.
- (6) 井川・野田、日本機械学会講演論文集、No.008-1 (2000)、pp.175-176.
- (7) 井川・野田、日本機械学会講演論文集、No.00-1 (2000)、pp.79-80.
- (8) 井川、日本機械学会講演論文集、No.005-2 (2000)、pp.53-54.
- (9) 井川・隈部・野田、日本機械学会講演論文集、No.01-1 (2001)、pp.135-136.